あるCM楕円曲線に付随するL関数の特殊値の代数的部分の2進付値

九州大学 大学院 数理学府 数理学専攻

野本 慶一郎(Keiichiro NOMOTO)

nomoto.keiichiro.635@s.kyushu-u.ac.jp

K. Nomoto, Lower bound for the 2-adic valuations of central L-values of elliptic curves with complex multiplication. (in progress)

主定理

Theorem(N.)

$\mathbb{Q}(i)$上の楕円曲線$E_{4D} : y^2 = x^3 - 4Dx$ $((D,2) = 1)$と, 付随するHecke指標ψ_{4D}に対して, 以下の評価が成り立つ.

$$v_2\left(\frac{L_4(\psi_{4D},1)}{\omega}\right) \geq \begin{cases} \dfrac{2r(D)-1}{2} & (D : \text{square in } \mathbb{Q}(i)) \\ \dfrac{r(D)-2}{2} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$r(D)$: Dを割る異なる素元の個数.

$\omega = 5.244115108...$: $y^2 = x^3 - x$の実周期.

目次

- モチベーション
- セッティング
- 証明の概要

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

Leonhard Euler (1707-1783)

Riemann ζ関数 $\zeta(s) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s}$ $(\mathrm{Re}(s) > 1)$ に対して, 以下が成り立つ:

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1}\frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

ただし, B_n $(n = 0,1,2,\ldots)$はBernoulli数である.

Bernoulli数

$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}x^n$ によって与えられる有理数. $B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, \ldots$ と続く.

$$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90} \qquad \zeta(6) = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945}$$

素数pに対して, $\dfrac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} \in \mathbb{Q}$ のp進付値は？(Bernoulli数のp進付値は？)

Clausen-von Staudtの定理の帰結

$$v_p(B_k)\begin{cases} \geq 2k & (p \nmid k-1) \\ = -1 & (p \mid k-1) \end{cases}$$

より本質的に解決.

$\Longrightarrow$ **楕円曲線類似を考える.**

簡単のため, $\mathbb{Q}$上の楕円曲線Eを考える. modelを一つ固定すると, 実周期

$$\Omega_E := \int_{E^0_{min}(\mathbb{R})} \left| \omega(E_{\mathrm{min}}) \right|$$

$$\boxed{\pi = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx}$$

が定まる(この値は円周率の類似物). このとき$L(E/\mathbb{Q},1) \neq 0$ならば, 強いBirch and Swinenrton-Dyer予想は以下の等式を主張:

$$L(E/\mathbb{Q},1) = \frac{\Omega_E \cdot \prod_p c_p \cdot \#\mathrm{Sha}(E/\mathbb{Q})}{\left(\#E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}\right)^2}$$

$c_p \in \mathbb{Z}$: 素数pにおける玉河因子

$\mathrm{Sha}(E/\mathbb{Q})$: Tate-Shafarevich群

素数pに対して, $\dfrac{L(E/\mathbb{Q},1)}{\Omega_E} \in \mathbb{Q}$の$p$進付値は？

Theorem (Deuring, special case)

$\mathbb{Q}$上定義された楕円曲線Eは, 虚二次体Kの整数環$\mathcal{O}_K$により虚数乗法(Complex Multiplication)をもつと仮定する. このとき以下を満たすHecke指標$\psi_{E/K}$が存在する:

$$L(E/\mathbb{Q}, s) = L(\psi_{E/K}, s)$$

微修正

・主定理での場合分けを減らすため, $L(\psi_{E/K},1)$ではなく$L_4(\psi_{E/K},1)$を計算する.

ただし, Hecke指標ψと$\mathcal{O}_K$のイデアル$\mathfrak{g}(\neq 0)$に対し, $L_{\mathfrak{g}}(\psi,s)$を以下のように定める:

$$L_{\mathfrak{g}}(\psi,s) = L(\psi,s)\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{g}}\left(1-\frac{\psi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)$$

・求めたいものは$L_4(\psi_{E/K},1)/\Omega_E$であるが, これから楕円曲線$E$に含まれるパラメータをコロコロ変えるため, Ω_Eでは無く$y^2=x^3-x$の実周期$\omega(=5.24411510...)$に固定する.

目標

CM楕円曲線$E/\mathbb{Q}$に対して, $v_p\left(\frac{L_4(\psi_{E/K},1)}{\omega}\right)$を評価する. ただし$p=2$とする.

Zhao's method

$$\begin{tikzcd}
& v_p\left(\frac{L(\psi_D,1)}{\omega}\right) \arrow[dl, "\text{parametrize}"'] & \\
v_p\left(\frac{L(\psi_{D_T},1)}{\omega}\right) \arrow[rr, "\text{summation}"'] & & v_p\left(\sum_T \frac{L(\psi_{D_T},1)}{\omega}\right) \arrow[ul, "\begin{array}{c}\text{non-Archimedean}\\ \&\\ \text{induction}\end{array}"']
\end{tikzcd}$$

本発表で扱う楕円曲線

$$E_{4D}/K : y^2 = x^3 - 4Dx \quad (K = \mathbb{Q}(i))$$

ただし$D \in K^\times$は2と互いに素.

$\psi_{4D} : E_{4D}$に付随するHecke指標

$d \in K^\times$に対し, E_{d^4D}とE_DはK上同型:

$$E_D \xrightarrow{\simeq} E_{d^4D}; (x, y) \mapsto (d^2x, d^3y)$$

したがって, <u>Dは四乗因子を含まない整数環$\mathcal{O}_K$の元と仮定してよい</u>.

Dは以下の$D_1^{(n)}, D_2^{(m)}, D_3^{(\ell)}$の内のいくつかの積として一意的に表示できる:

$$D_1^{(n)} = \prod_{\pi_{1,i}\in S_1} \pi_{1,i}, \quad D_2^{(m)} = \prod_{\pi_{2,j}\in S_2} \pi_{2,j}^2, \quad D_3^{(\ell)} = \prod_{\pi_{3,k}\in S_3} \pi_{3,k}^3$$

ただし,

$$S_1 = \{\pi_{1,1}, \ldots, \pi_{1,n}\}, \quad S_2 = \{\pi_{2,1}, \ldots, \pi_{2,m}\}, \quad S_3 = \{\pi_{3,1}, \ldots, \pi_{3,\ell}\}$$

は2と互いに素な異なる$\mathcal{O}_K$の素元で$\pi_{i,j} \equiv 1 \bmod 2 + 2i$と正規化したもの.

$T_1 \subset \{1,\ldots,n\}, T_2 \subset \{1,\ldots,m\}, T_3 \subset \{1,\ldots,\ell\}$を任意の部分集合とし, $D_1^{(n)}, D_2^{(m)}, D_3^{(\ell)}$の部分積を

$$D_{T_1} = \prod_{i \in T_1} \pi_{1,i}, \quad D_{T_2} = \prod_{j \in T_2} \pi_{2,j}^2, \quad D_{T_3} = \prod_{k \in T_3} \pi_{3,k}^3$$

と定め, $D_T = D_{T_1} D_{T_2} D_{T_3}$ とおく.

Example

例えば$S_1 = \{\pi_{1,1}, \pi_{1,2}\}, S_2 = \{\pi_{2,1}, \pi_{2,2}, \pi_{2,3}\}, S_3 = \{\pi_{3,1}\}$の場合を考える:

$$D_1^{(2)} = \pi_{1,1}\pi_{1,2}, \quad D_2^{(3)} = \pi_{2,1}^2\pi_{2,2}^2\pi_{2,3}^2, \quad D_3^{(1)} = \pi_{3,1}^3, \quad D = \pi_{1,1}\pi_{1,2} \cdot \pi_{2,1}^2\pi_{2,2}^2\pi_{2,3}^2 \cdot \pi_{3,1}^3$$

このとき例えば $T_1 = \{1\}, T_2 = \{1,3\}, T_3 = \emptyset$ ならば

$$D_{T_1} = \pi_{1,1}, \quad D_{T_2} = \pi_{2,1}^2\pi_{2,3}^2, \quad D_{T_3} = 1, \quad D_T = \pi_{1,1} \cdot \pi_{2,1}^2\pi_{2,3}^2 \cdot 1$$

さらに例えば$T_1 = \{1,2\}, T_2 = \{1,2,3\}, T_3 = \{1\}$ならば

$$D_{T_1} = D_1^{(2)}, \quad D_{T_2} = D_2^{(3)}, \quad D_{T_3} = D_3^{(1)}, \quad D_T = D$$

L-valueの有限和表示

- $\omega : y^2 = x^3 - x$の実周期(=5.244115108...)
- $\wp(z) = \wp(z, \omega\mathcal{O}_K)$: Weierstrass $\wp$関数
- $\Delta : \mathcal{O}_K$の適切なイデアル
- $(\,\cdot\,/\,\cdot\,)_4$: 四乗剰余記号

Proposition

$(\mathcal{O}_K/\Delta)^\times$の完全代表系の一つを$C$とする. また, $V = \{c \in C \mid c \equiv 1 \bmod 2+2i\}$とする.

このとき, ある$S(z) \in \mathbb{C}(\wp(z\omega/\Delta), \wp'(z\omega/\Delta))$が存在して以下が成り立つ.

①

$$\frac{\Delta L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_T}}, 1)}{\omega} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{4}\displaystyle\sum_{c\in C}\left(\frac{c}{D_T}\right)_4 + \sum_{c\in V}\left(\frac{c}{D_T}\right)_4 S(c) & ((-1/D_T)_4 = 1) \\ \displaystyle\sum_{c\in V}\left(\frac{c}{D_T}\right)_4 S(c) & ((-1/D_T)_4 = -1) \end{cases}$$

② 任意の$c \in V$に対して$v_2(S(c)) = -1/2$.

簡単のため, $(-1/D_T)_4 = -1$の場合を考える. Propositionの等式でTに関する和を取ると

$$\sum_T \frac{\Delta L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_T}}, 1)}{\omega} = \sum_{c \in V} S(c) \sum_T \left(\frac{c}{D_T}\right)_4$$

を得る. ここで. Tは評価したいDの形によって渡らせる範囲を変える.

- $D = D_1^{(n)}$のとき

$$\sum_{T_1 \subset \{1,\ldots,n\}} \left(\frac{c}{D_T}\right)_4 = \left\{1 + \left(\frac{c}{\pi_{1,1}}\right)_4\right\}\left\{1 + \left(\frac{c}{\pi_{1,2}}\right)_4\right\}\cdots\left\{1 + \left(\frac{c}{\pi_{1,n}}\right)_4\right\}$$

- $D = D_1^{(n)} D_2^{(m)}$のとき

$$\sum_{\substack{T_1 \subset \{1,\ldots,n\} \\ T_2 \subset \{1,\ldots,m\}}} \left(\frac{c}{D_T}\right)_4 = \left\{1 + \left(\frac{c}{\pi_{1,1}}\right)_4\right\}\left\{1 + \left(\frac{c}{\pi_{1,2}}\right)_4\right\}\cdots\left\{1 + \left(\frac{c}{\pi_{1,n}}\right)_4\right\} \cdot \left\{1 + \left(\frac{c}{\pi_{2,1}}\right)_4\right\}\left\{1 + \left(\frac{c}{\pi_{2,2}}\right)_4\right\}\cdots\left\{1 + \left(\frac{c}{\pi_{2,m}}\right)_4\right\}$$

Proposition

$$v_2\left(\sum_T \frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_T}},1)}{\omega}\right) \geq \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} & (T_1 \subset \{1,\ldots,n\}) \\ \dfrac{2m-1}{2} & (T_2 \subset \{1,\ldots,m\}) \\ \dfrac{\ell-1}{2} & (T_3 \subset \{1,\ldots,\ell\}) \\ \dfrac{n+2m-1}{2} & (T_1 \subset \{1,\ldots,n\}, T_2 \subset \{1,\ldots,m\}) \\ \dfrac{2m+\ell-1}{2} & (T_2 \subset \{1,\ldots,m\}, T_3 \subset \{1,\ldots,\ell\}) \\ \dfrac{n+\ell-1}{2} & (T_1 \subset \{1,\ldots,n\}, T_3 \subset \{1,\ldots,\ell\}) \\ \dfrac{n+2m+\ell-1}{2} & (T_1 \subset \{1,\ldots,n\}, T_2 \subset \{1,\ldots,m\}, T_3 \subset \{1,\ldots,\ell\}) \end{cases}$$

Theorem(N.)

K上の楕円曲線$E_{4D}: y^2 = x^3 - 4Dx$と, 付随するHecke指標ψ_{4D}に対して

$$v_2\left(\frac{L_4(\overline{\psi_{4D}},1)}{\omega}\right) \geq \begin{cases} \dfrac{2r(D)-1}{2} & (D : \text{square in } K) \\ \dfrac{r(D)-2}{2} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

が成り立つ. ただし$r(D)$はDを割るような異なる素元の数であり,

$\omega = 5.244115108...$は$E_1: y^2 = x^3 - x$の実周期である. また, v_2は$\mathbb{Q}_2$上の正規化

付値である.

⟹ Dが$D_1^{(n)}, D_2^{(m)}, D_3^{(\ell)}, D_1^{(n)}D_2^{(m)}, \ldots$ となる場合でそれぞれ示す.

Theorem ($D = D_1^{(n)}$)

$\psi_{4D_1^{(n)}}$を, K上の楕円曲線$E_{4D_1^{(n)}} : y^2 = x^3 - 4D_1^{(n)}x$に付随するHecke指標とする.

このとき以下の評価が成り立つ.

$$v_2\left(\frac{L_4(\overline{\psi_{4D_1^{(n)}}},1)}{\omega}\right) \geq \frac{n-2}{2}$$

(証明の概要)

nに関する帰納法で示す. propositionで得られた和の2進付値の評価

$$v_2\left(\sum_{T_1\subset\{1,\ldots,n\}}\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_T}},1)}{\omega}\right)\geq\frac{n-1}{2}>\frac{n-2}{2}$$

をバラすと, 以下の式が得られる.

$$v_2\left(\underbrace{\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4},1)}{\omega}}_{T_1=\emptyset}+\sum_{\emptyset\neq T_1\subsetneq\{1,\ldots,n\}}\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_T}},1)}{\omega}+\underbrace{\frac{L^*_{4\Delta}(\psi_{4D_1^{(n)}},1)}{\omega}}_{T_1=\{1,\ldots,n\}}\right)\geq\frac{n-2}{2}$$

T_1に依存しない

帰納法の仮定

欲しいところ

Theorem ($D = D_1^{(n)} D_2^{(m)}$)

$\psi_{4D_1^{(n)}D_2^{(m)}}$を$K$上の楕円曲線$E_{4D_1^{(n)}D_2^{(m)}} : y^2 = x^3 - 4D_1^{(n)}D_2^{(m)}x$に付随するHecke指標とする. このとき以下の評価が成り立つ.

$$v_2\left(\frac{L_4(\overline{\psi_{4D_1^{(n)}D_2^{(m)}}},1)}{\omega}\right) \geq \frac{n+m-2}{2}$$

(証明の概要)

以下のステップに基づき, n, mに関する二重帰納法で示す.

① 任意の$m \in \mathbb{N}$に対して$(1,m)$で成り立つ.

② 任意の$n \in \mathbb{N}$に対して$(n,1)$で成り立つ.

③ $(n_0, m_0) \neq (n, m)$ $(1 \leq n_0 \leq n, 1 \leq m_0 \leq m)$で成り立つならば$(n, m)$で成り立つ.

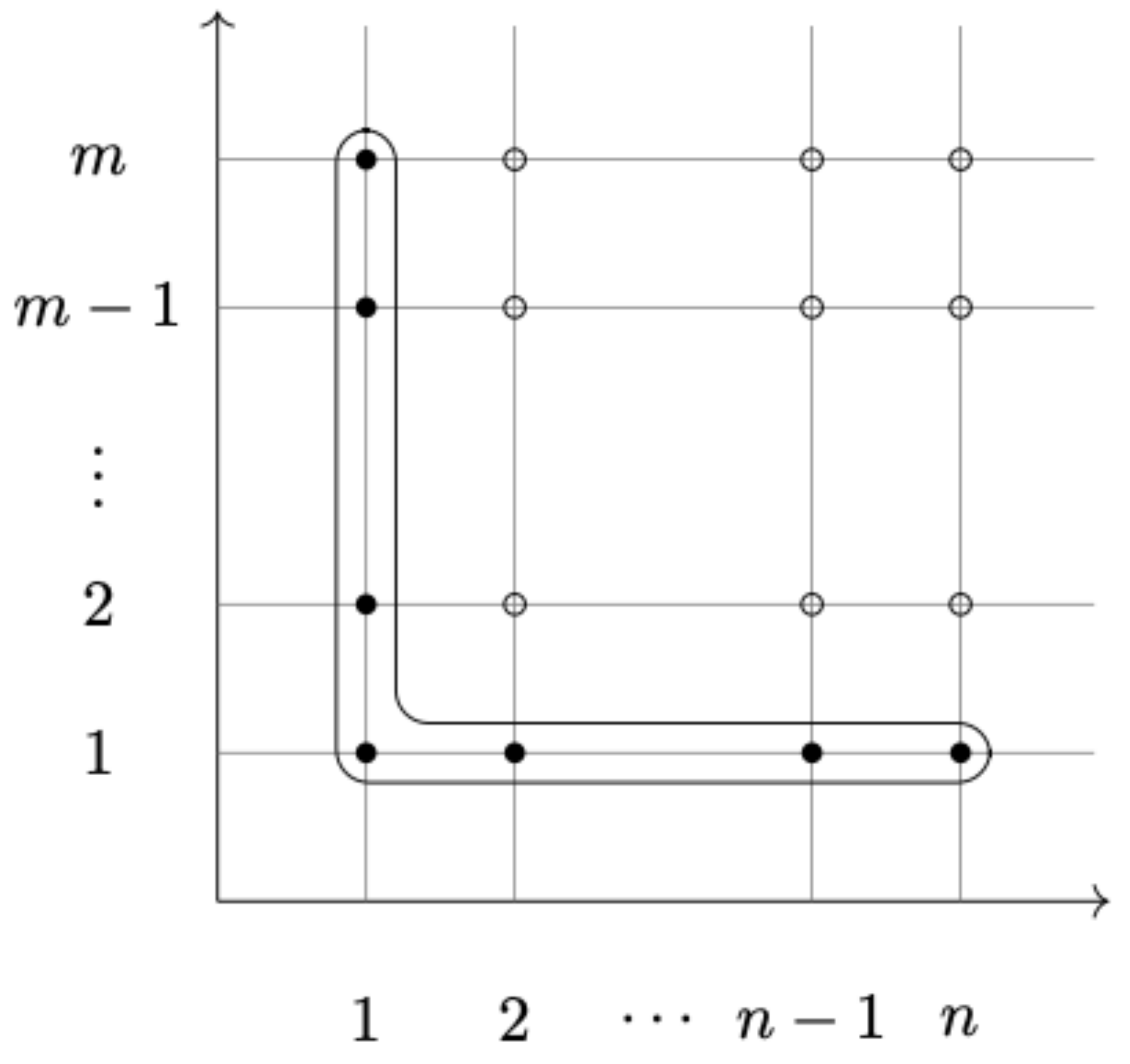

図 1　ステップ 1 とステップ 2

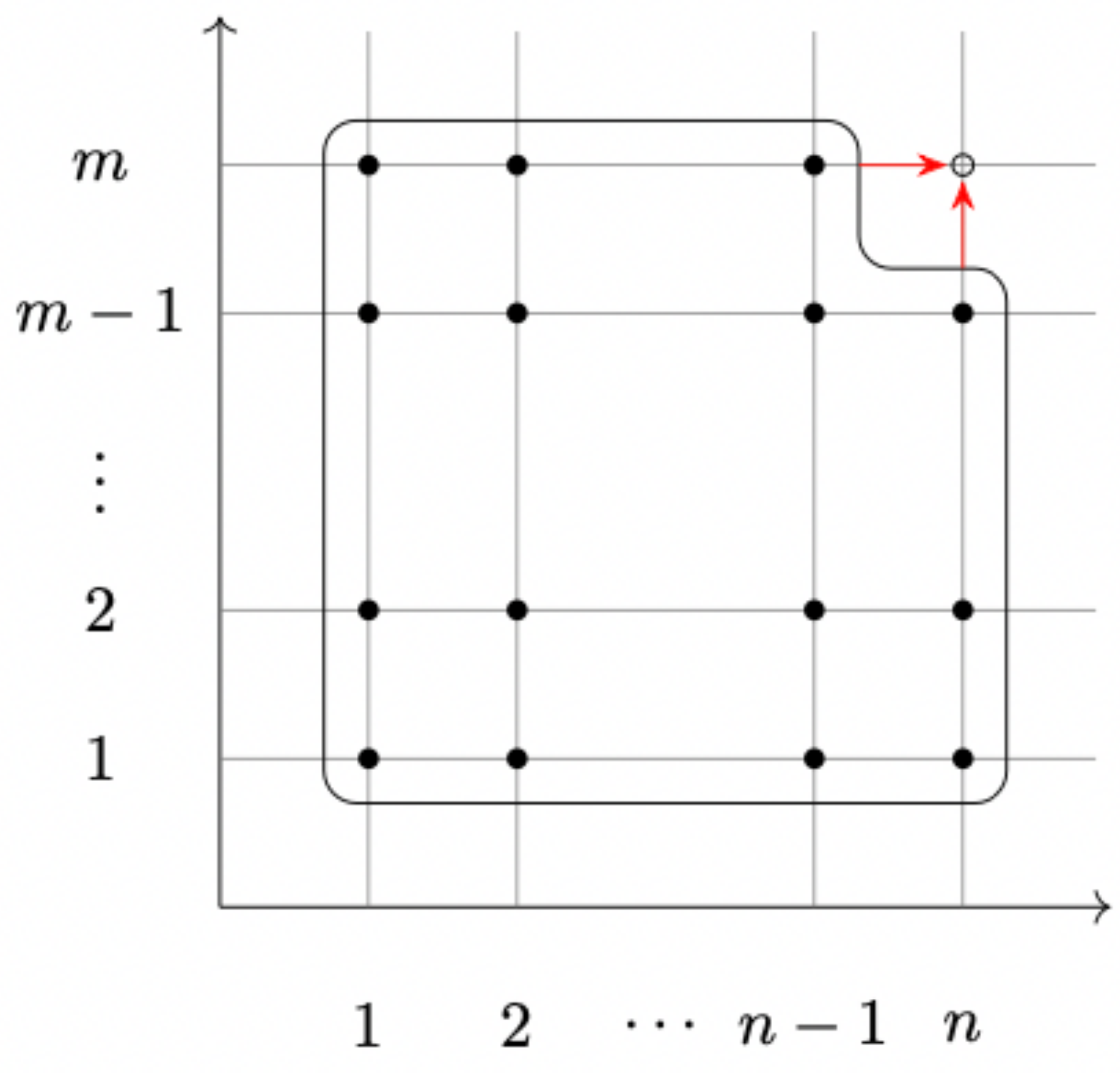

図 2　ステップ 3

(ステップ③)

propositionで得られた和の2進付値の評価

$$v_2\left(\sum_{\substack{T_1\subset\{1,\dots,n\}\\ T_2\subset\{1,\dots,m\}}}\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_T}},1)}{\omega}\right)\geq\frac{n+2m-1}{2}>\frac{n+m-2}{2}$$

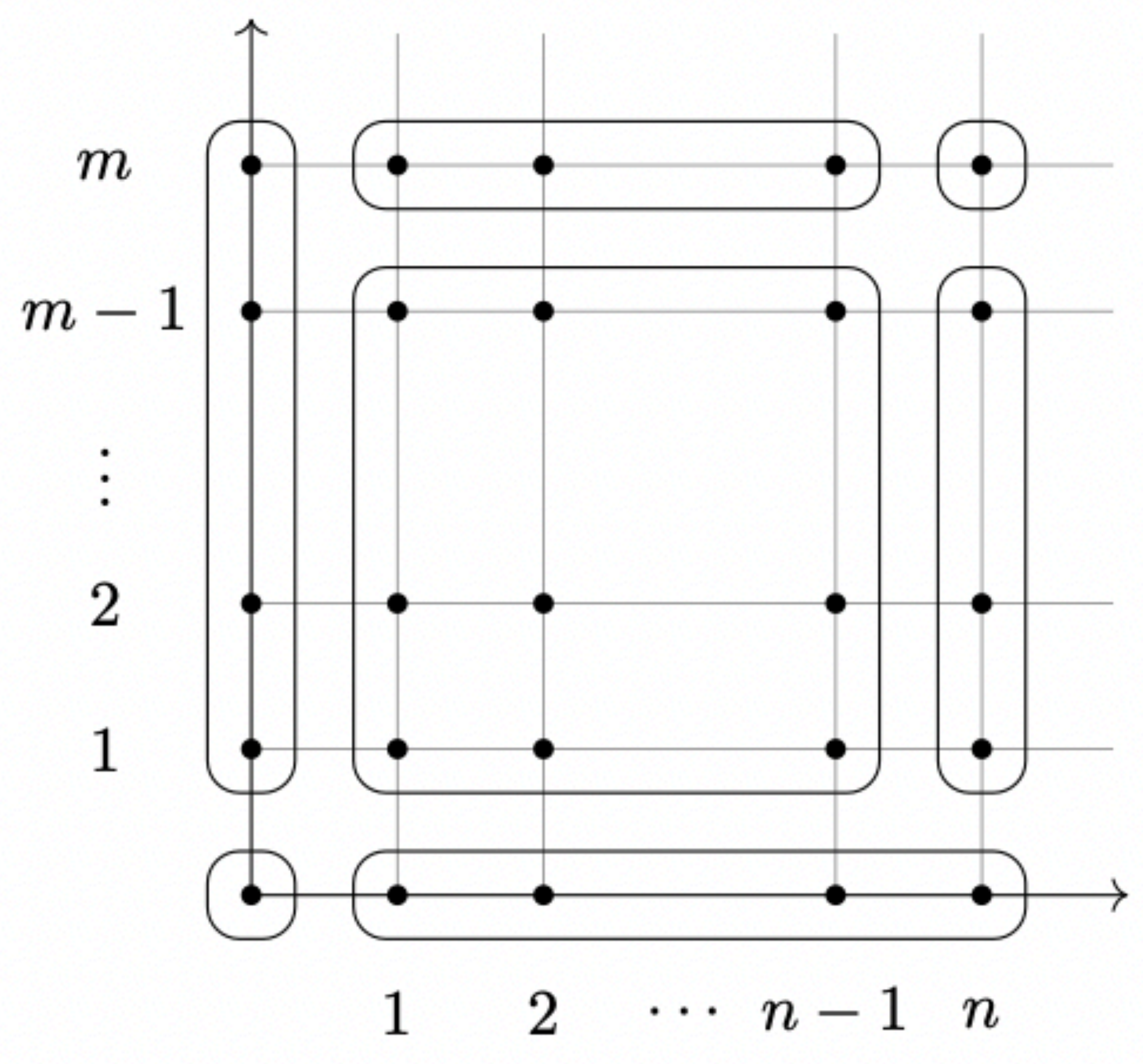

図 3　和の分解の様子

を図のようにバラすと, 次の式が得られる.

$$
v_2\left(\underbrace{\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4},1)}{\omega}}_{T_1=T_2=\emptyset}+\right.
$$

$$
\sum_{\emptyset\neq T_1\subset\{1,\dots,n\}}\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_1}}},1)}{\omega}+\sum_{\emptyset\neq T_2\subset\{1,\dots,m\}}\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_2}}},1)}{\omega}+
$$

$$
\sum_{\substack{\emptyset\neq T_1\subsetneq\{1,\dots,n\}\\ \emptyset\neq T_2\subsetneq\{1,\dots,m\}}}\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_1}D_{T_2}}},1)}{\omega}+\sum_{\emptyset\neq T_1\subsetneq\{1,\dots,n\}}\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_1}D_2^{(m)}}},1)}{\omega}+\sum_{\emptyset\neq T_2\subsetneq\{1,\dots,m\}}\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_1^{(n)}D_{T_2}}},1)}{\omega}+
$$

$$
\left.\underbrace{\frac{L^*_{4}(\overline{\psi_{4D_1^{(n)}D_2^{(m)}}},1)}{\omega}}_{T_1=\{1,\dots,n\},T_2=\{1,\dots,m\}}\right)
$$

$$
\geq\frac{n+m-2}{2}
$$

T_1, T_2に依存しない

$D=D_1^{(n)}, D_2^{(m)}$のときの結果

帰納法の仮定

欲しいところ

Theorem(N.)

K上の楕円曲線$E_{4D} : y^2 = x^3 - 4Dx$と, 付随するHecke指標ψ_{4D}に対して

$$v_2\left(\frac{L_4(\overline{\psi_{4D}},1)}{\omega}\right) \geq \begin{cases} \dfrac{2r(D)-1}{2} & (D : \text{square in } K) \\ \dfrac{r(D)-2}{2} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

が成り立つ. ただし$r(D)$はDを割るような異なる素元の数であり,

$\omega = 5.244115108...$は$E_1 : y^2 = x^3 - x$の実周期である. また, v_2は$\mathbb{Q}_2$上の正規化付値である.

何故 $p=2$ か？

Theorem

(1) [Rubin] 楕円曲線$E/\mathbb{Q}$は虚二次体Kの整数環$\mathcal{O}_K$により虚数乗法をもつと仮定する. $L(E/\mathbb{Q},1)\neq 0$のとき, $p\nmid \mathcal{O}_K^\times$なる素数$p$に対して(*)が成り立つ.

(2) [Kato, Skinner-Urban] 楕円曲線$E/\mathbb{Q}$と$p\geq 3$なる素数に対し, ガロア表現$\overline{\rho_{E,p}}$がある条件を満たし, かつ$L(E/\mathbb{Q},1)\neq 0$のとき(*)が成り立つ.

$$v_p\left(\frac{L(E/\mathbb{Q},1)}{\Omega_E}\right)=v_p\left(\frac{\prod_q c_q\cdot \#Sha(E/\mathbb{Q})}{(\#E(\mathbb{Q})_{tors})^2}\right)\qquad (*)$$

A. 岩澤理論を用いた手法では基本的に$p=2$は調べられないから.