重さ2のHecke固有形式の二次捻りに対する L関数の中心値の2進付値

- 足立大雅氏(九州大学), 椎井亮太氏(九州大学)との共同研究 -

2024 年 2 月 29 日
株式会社光電製作所 野本慶一郎

モチベーション

- E を $\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線, $L(E/\mathbb{Q},s)$ をそのHasse–Weil L 関数とする.
- E の適切なモデルから定まる周期を Ω と書く. このとき

$$\frac{L(E/\mathbb{Q},1)}{\Omega}$$

は代数的数になることがManinやDrinfeldらにより示されている.

```
Elliptic Curve defined by y^2 + x*y = x^3 - 3*x + 1 over Rational Field

L(E/Q, 1)          = 0.749277221052284
Omega              = 2.24783166315685
L(E/Q, 1)/Omega = 0.333333333333333
```

- このような値は L 関数の特殊値の代数的部分と呼ばれ, 数論的に重要な対象である.

KODEN 株式会社光電製作所

1 Rank 0 及びTate—Shafarevich群の有限性・非自明性

- 代数的部分が0でないと仮定する. このときKolyvagin, Gross—Zagierにより

$$\mathrm{rank}\, E(\mathbb{Q}) = 0, \qquad \#\mathrm{Sha}(E/\mathbb{Q}) < \infty$$

が成り立つ. ただし $\mathrm{Sha}(E/\mathbb{Q})$ はTate—Shafarevich群である.

- さらに, Birch and Swinnerton-Dyer予想を認めると次の等式が成り立つ.

$$\frac{L(E/\mathbb{Q}, 1)}{\Omega} = \frac{\prod_{\ell:prime} c_\ell \cdot \#\mathrm{Sha}(E/\mathbb{Q})}{\#E(\mathbb{Q})_{tors}^2}$$

この等式から非自明なTate—Shafarevich群をもつ楕円曲線を具体的に発見できる可能性がある.

2 p 部分BSD予想への貢献

- $L(E/\mathbb{Q},1) \neq 0$ と仮定する. このときBSD予想の両辺の p 進付値を取った

$$v_p\left(\frac{L(E/\mathbb{Q},1)}{\Omega}\right) = \sum_{\ell:prime} v_p(c_\ell) + v_p(\#\mathrm{Sha}(E/\mathbb{Q})) - 2v_p(\#E(\mathbb{Q})_{tors})$$

  は p 部分BSD予想(rank 0 case)と呼ばれている.
- p 部分BSD予想に対しては岩澤理論的アプローチを取るのが主流であるが, 小さな素数 (e.g. $p = 2,3$) は例外として扱われることがほとんどである.
- したがって本研究では代数的部分の2進付値を別の手法で評価する.

KODEN 株式会社光電製作所

3 Goldfeld予想解決への手がかり

- square-freeな整数 d に対して $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$に付随する E の二次捻りを $E^{(d)}$と書く.

Goldfeld予想

$$\mathrm{density}(d) = \begin{cases} 1/2 & \left(\mathrm{rank}\, E^{(d)}(\mathbb{Q}) = 0\right), \\ 1/2 & \left(\mathrm{rank}\, E^{(d)}(\mathbb{Q}) = 1\right), \\ 0 & \left(\mathrm{rank}\, E^{(d)}(\mathbb{Q}) \geq 2\right). \end{cases}$$

- Rankが0になる捻りの条件, すなわち代数的部分が0にならない条件を調べる必要がある.
  したがって代数的部分の p 進付値が有限かどうか決定することも重要な課題である.

KODEN 株式会社光電製作所

Twisted L 関数

- $f=\sum a_n q^n \in S_2(\Gamma_0(N))^{new}$ を E の $\mathbb{Q}$-同種類に対応する正規化されたHecke固有形式とする.
- m を $(m,N)=1$ を満たす無平方な正の奇数, $\varepsilon \in \{1,-1\}$ とする. このとき次が成り立つ.

$$L\left(E^{(\varepsilon m)}/\mathbb{Q},s\right)=L(f,\chi_M,s)$$

ここで, χ_M は原始的な二次Dirichlet指標であり, その導手 M は次で与えられる.

$$M=\begin{cases} m, & (\varepsilon m\equiv 1 \bmod 4) \\ 4m, & (\varepsilon m\equiv 3 \bmod 4) \end{cases}$$

- χ_M の符号を $\mathrm{sgn}(\chi_M)\coloneqq\chi_M(-1)$ で定義する.

主定理の準備

Hecke固有形式の周期

- Hecke固有形式 $f \in S_2(\Gamma_0(N))^{new}$ の周期格子 $\mathcal{L}_f$ を次のように定める.

$$\mathcal{L}_f := \left\{ \int_\gamma f(q) \frac{dq}{q} \,\middle|\, \gamma \in H_1(X_0(N)(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \right\} \subset \mathbb{C}$$

- $\mathcal{L}_f$ に含まれる最小の正の実数を Ω_f^+ , 虚部が最小の純虚数を Ω_f^- とおく.
- このとき, 適切な仮定の下で次のような表示をもつ.

$$\mathcal{L}_f = \Omega_f^+ \mathbb{Z} + \Omega_f^- \mathbb{Z} \quad \text{または} \quad \mathcal{L}_f = \Omega_f^+ \mathbb{Z} + \frac{\Omega_f^+ + \Omega_f^-}{2} \mathbb{Z}$$

定理(Manin, Drinfeld)

$$\frac{L(f, \chi_M, 1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}} \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

主定理

- $M=4^n m=4^n q_1\cdots q_r$ $(n\in\{0,1\}, q_i;$ 異なる奇素数) と書く. このとき次のようにおく.

$$\mathfrak{v}_m := \min\{v_2(a_{q_1}-2),\dots,v_2(a_{q_r}-2)\},\qquad \mathcal{S}_i := \{\,q:\text{奇素数} \mid q\nmid N, v_2(a_q-2)=i\,\}$$

定理 (N-Adachi-Shii, 2023)

素因数の個数 r に依らない定数 c が存在して, 全ての i に対して $q_i\in\mathcal{S}_0\cup\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2$ ならば

$$v_2\left(\frac{L(f,\chi_M,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}}\right)\geq \mathfrak{v}_m\cdot r+c.$$

さらに, 無限個の M に対して等号が成立する. したがってそのような M に対して

$$E^{(\varepsilon m)}(\mathbb{Q}),\qquad \mathrm{Sha}(E^{(\varepsilon m)}/\mathbb{Q})$$

はいずれも有限群である.

株式会社光電製作所

注意

- 定数 c は $v_2\left(L(f,1)/\Omega_f^+\right)$ 等を用いてexplicitに記述することができる.
- 等号成立条件も, いくつかの場合にはexplicitに記述することができる.
- 条件「$q_i \in \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ $(\forall i)$」を外して評価することも出来るが, sharpな下界とはならない.

新規性

- 先行研究[1],[2],[3],[4],[5]では全て $\varepsilon m \equiv 1 \bmod 4$ の場合しか扱っておらず,
  $\varepsilon m \equiv 3 \bmod 4$ の場合に計算されている例は(恐らく)無し.
- $\varepsilon m \equiv 1 \bmod 4$ の場合でも, よりsharpな下界や緩い等号成立条件を与えている場合がある.

[1] S. Zhai, Non-vanishing, theorems for quadratic twists of elliptic curves, 2016.
[2] S. Zhai, On the weak forms of the 2-part of Birch and Swinnerton-Dyer conjecture, 2020.
[3] L. Cai, C. Li, S. Zhai, On the 2-part of the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture for quadratic twists of elliptic curves, 2020.
[4] S. Zhai, A lower bound result for the central L-values of elliptic curves, 2020.
[5] S. Zhai, The Birch–Swinnerton-Dyer exact formula for quadratic twists of elliptic curves, 2021.

等号成立の具体例

KODEN 株式会社光電製作所

- $\varepsilon = +1$ とする. また, $f \in S_2(\Gamma_0(34))^{new}$ を以下のFourier級数をもつ固有形式とする.

$$f = q + q^2 - 2q^3 + q^4 - 2q^6 - 4q^7 + q^8 + q^9 + O(q^{10})$$

- この f に対応する楕円曲線は $E_f : y^2 + y = x^3 - 3x + 1$ (Cremona label: 34a1)である.
- $m = q_1 \cdots q_r$ に対して, $q_i \in \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ かつ $\mathrm{sgn}(\chi_{q_i}) = +1\ (\forall i)$ ならば

$$v_2\left(\frac{L(f,\chi_m,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_m)}}\right) \geq \mathfrak{v}_m \cdot r + \min\left\{1 + \delta_{\mathfrak{v}_m,0},\, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\}.$$

- さらに, $q_i \in \mathcal{S}_1\ (\forall i)$ が成り立つとき等号が成立する. つまり

$$q_i \equiv 1 \bmod 4, \qquad a_{q_i} \equiv 0 \bmod 4$$

が成り立つとき代数的部分の付値はちょうど r となる (e.g. $q_i = 5$).

- Chebotarevの密度定理より, そのような素数は無限個存在する.

等号成立の具体例

株式会社光電製作所

[5, 29, 37, 61, 109, 173, 181, 197, 269, 277, 317, 397, 541, 653, 677, 709, 821, 853, 877, 941, 997, 1013, 1061, 1093, 1117, 1213, 1229, 1493, 1621, 1637, 1669, 1693, 1741, 1877, 1901, 1933, 1949, 2029, 2069, 2213, 2221, 2237, 2309, 2341, 2357, 2437, 2477, 2557, 2621, 2693, 2749, 2861, 2917, 3037, 3253, 3301, 3373, 3389, 3461, 3533, 3541, 3581, 3677, 3701, 3709, 3733, 3797, 3853, 3917, 3989, 4253, 4261, 4349, 4357, 4397, 4493, 4517, 4549, 4597, 4621, 4733, 4789, 4933, 4957, 5021, 5077, 5197, 5309, 5333, 5413, 5437, 5477, 5501, 5573, 5581, 5701, 5717, 5741, 5749, 5821, 5981, 6029, 6229, 6301, 6317, 6389, 6397, 6421, 6637, 6653, 6661, 6701, 6709, 6829, 6997, 7069, 7109, 7213, 7237, 7253, 7333, 7349, 7477, 7517, 7541, 7589, 7621, 7741, 7757, 7789, 7877, 7933, 7949, 8053, 8069, 8221, 8269, 8293, 8429, 8461, 8573, 8597, 8629, 8677, 8693, 8741, 8837, 9013, 9109, 9157, 9173, 9221, 9277, 9293, 9413, 9421, 9629, 9661, 9781, 9829, 9901, 9973, 10037, 10061, 10069, 10093, 10333, 10477, 10501, 10597, 10613, 10733, 10781, 10789, 10853, 10909, 11149, 11197, 11213, 11261, 11317, 11549, 11597, 11621, 11701, 11821, 11941, 12101, 12109, 12149, 12269, 12277, 12301, 12373, 12413, 12421, 12437, 12517, 12541, 12637, 12653, 12757, 12781, 12821, 12829, 12893, 12917, 13093, 13229, 13469, 13597, 13709, 13781, 13877, 13901, 13933, 13997, 14149, 14173, 14341, 14389, 14461, 14549, 14557, 14717, 14797, 14813, 14821, 14869, 14957, 15101, 15269, 15277, 15373, 15413, 15493, 15541, 15629, 15749, 15773, 15901, 15973, 16189, 16229, 16349, 16381, 16453, 16493, 16901, 17029, 17317, 17333, 17573, 17581, 17669, 17789, 17957, 17981, 17989, 18013, 18061, 18077, 18133, 18149, 18229, 18253, 18269, 18397, 18493, 18541, 18637, 18661, 18757, 18773, 18797, 19013, 19037, 19069, 19181, 19213, 19237, 19301, 19309, 19373, 19421, 19477, 19709, 19717, 19853, 19861, 19997, 20021, 20029, 20101, 20117, 20173, 20261, 20269, 20389, 20509, 20533, 20717, 20981, 21221, 21277, 21341, 21397, 21493, 21517, 21613, 21661, 21757, 21821, 21893, 22037, 22093, 22157, 22229, 22277, 22349, 22469, 22501, 22549, 22573, 22613, 22621, 22637, 22709, 22717, 22741, 22853, 22877, 22973, 23021, 23029, 23117, 23293, 23557, 23669, 23773, 23789, 23909, 23981, 24061, 24077, 24109, 24133, 24181, 24197, 24317, 24373, 24469, 24509, 24517, 24677, 24749, 24781, 24877, 24917, 25013, 25189, 25301, 25357, 25469, 25541, 25693, 25733, 25741, 25981, 26021, 26141, 26237, 26293, 26309, 26357, 26557, 26693, 26701, 26717, 26821, 27061, 27109, 27197, 27397, 27509, 27581, 27653, 27733, 27749, 27773, 27917, 27941, 28181, 28277, 28349, 28429, 28549, 28597, 28621, 28669, 28837, 29077, 29101, 29269, 29437, 29501, 29573, 29789, 29917]

等号成立の具体例

KODEN 株式会社光電製作所

- これらの素数を任意個取り, それらを掛け合わせた整数を $m = q_1 \cdots q_r$ としたとき以下が成り立つ.

$$
\begin{cases}
v_2\left(\dfrac{L(f,\chi_m,1)}{\Omega_f^+}\right) = v_2\left(\dfrac{L(E^{(m)}/\mathbb{Q},1)}{\Omega_E^+}\right) = r \\
\operatorname{rank} E^{(m)}(\mathbb{Q}) = 0 \\
\#\mathrm{Sha}\left(E^{(m)}/\mathbb{Q}\right) < \infty.
\end{cases}
$$

```
【m = 5】
L(E^(m)/Q, 1)                 = 2.01052176031805
L(E^(m)/Q, 1)/Omega           = 0.894427190999916
L(E^(m)/Q, 1)*sqrt(m)/Omega = 2.00000000000000

【m = 5 * 29】
L(E^(m)/Q, 1)                 = 2.24006710916749
L(E^(m)/Q, 1)/Omega           = 0.996545758244879
L(E^(m)/Q, 1)*sqrt(m)/Omega = 12.0000000000000

【m = 5 * 29 * 37】
L(E^(m)/Q, 1)                 = 0.245509842828783
L(E^(m)/Q, 1)/Omega           = 0.109220742305938
L(E^(m)/Q, 1)*sqrt(m)/Omega = 8.00000000000000

【m = 5 * 29 * 37 * 61】
L(E^(m)/Q, 1)                 = 1.69745297050511
L(E^(m)/Q, 1)/Omega           = 0.755151285715589
L(E^(m)/Q, 1)*sqrt(m)/Omega = 432.000000000000
```

KODEN 株式会社光電製作所

モジュラー記号

- $r \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ に対して, 次のようにおく.

$$\langle r \rangle := 2\pi i \int_{i\infty}^{r} f(z)dz$$

命題

$\tau(\chi_M) = \sum \chi_M(a) e^{2\pi i a/M}$ をGauss和とする. このとき次が成り立つ.

$$\tau(\chi_M) \frac{L(f, \chi_M, 1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}} = \sum_{k \in (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times} \chi_M(k) \frac{1}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}} \left\langle \frac{k}{M} \right\rangle$$

KODEN 株式会社光電製作所

先行研究との違い

- $\langle r\rangle^+ \coloneqq \mathrm{Re}\langle r\rangle,\ \langle r\rangle^- \coloneqq \mathrm{Im}\langle r\rangle$ とおく. このとき $\langle r\rangle^\pm/\Omega_f^\pm$ は代数的数である.
- さらに次が成り立つ.

$$\sum_{k\in(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times} \chi_M(k)\frac{1}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}}\left\langle\frac{k}{M}\right\rangle = \sum_{k\in(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times} \chi_M(k)\frac{1}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}}\left\langle\frac{k}{M}\right\rangle^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}$$

各項が代数的とは限らず
評価できる対象が限られる

各項が代数的であり
より幅広く精密な評価が可能

KODEN 株式会社光電製作所

Zhao's method

- 約数の個数に関する帰納法を使用して代数的部分の p 進付値を評価・決定する手法.

$$\tau(\chi_M)\frac{L(f,\chi_M,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}} = \sum_{k\in(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times} \chi_M(k)\frac{1}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}}\left\langle\frac{k}{M}\right\rangle^{\mathrm{sgn}(\chi_M)} =: \mathcal{T}_M$$

証明の方針

KODEN 株式会社光電製作所

Zhao's method

- 約数の個数に関する帰納法を使用して代数的部分の p 進付値を評価・決定する手法.

$$\tau(\chi_M)\frac{L(f,\chi_M,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}} = \sum_{k\in(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times} \chi_M(k)\frac{1}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}}\left\langle\frac{k}{M}\right\rangle^{\mathrm{sgn}(\chi_M)} =: \mathcal{T}_M$$

計算しやすい右辺を
M の約数 D を用いて微修正

$$\sum_{k\in(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times} \chi_D(k)\frac{1}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_D)}}\left\langle\frac{k}{M}\right\rangle^{\mathrm{sgn}(\chi_D)} =: \mathcal{T}_{D,M}$$

証明の方針

KODEN 株式会社光電製作所

Zhao's method

- 約数の個数に関する帰納法を使用して代数的部分の p 進付値を評価・決定する手法.

$$\tau(\chi_M)\frac{L(f,\chi_M,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}} = \sum_{k\in(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times} \chi_M(k)\frac{1}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}}\left\langle\frac{k}{M}\right\rangle^{\mathrm{sgn}(\chi_M)} =: \mathcal{T}_M$$

本質的に D に対する代数的部分になっている

計算しやすい右辺を M の約数 D を用いて微修正

$$\sum_{q|M/D}(a_q-2\chi_D(q))\times\tau(\chi_D)\frac{L(f,\chi_D,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_D)}} = \sum_{k\in(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times} \chi_D(k)\frac{1}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_D)}}\left\langle\frac{k}{M}\right\rangle^{\mathrm{sgn}(\chi_D)} =: \mathcal{T}_{D,M}$$

証明の方針

株式会社光電製作所

Zhao's method

- 約数の個数に関する帰納法を使用して代数的部分の p 進付値を評価・決定する手法。

和を取ることで容易に2進付値の評価が可能

本質的に $\frac{L(f,\chi_D,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_D)}}$ に等しく

帰納法の仮定を使用可能

$$\sum_{D|M} \mathcal{J}_{D,M} = \mathcal{J}_{1,M} + \sum_{D|M,\, D\neq 1,M} \mathcal{J}_{D,M} + \mathcal{J}_M$$

本質的に $\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}$ に等しい

本質的に $\frac{L(f,\chi_M,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}}$ に等しい

まとめ

KODEN 株式会社光電製作所

1. **Rank 0及びTate—Shafarevich群の有限性・非自明性**
2. **p 部分BSD予想への貢献**
3. **Goldfeld予想への手がかり**

研究

$$v_2\left(\frac{L(f,\chi_M,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}}\right) = v_2\left(\frac{L(E^{(\varepsilon m)}/\mathbb{Q},1)}{\Omega_E^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}}\right)$$

有限和公式を利用

- $$\tau(\chi_M)\frac{L(f,\chi_M,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}} = \sum_{k\in(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times} \chi_M(k)\frac{1}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}}\left\langle\frac{k}{M}\right\rangle^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}$$

  $$\mathcal{T}_{D,M} := \sum_{k\in(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times} \chi_D(k)\frac{1}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_D)}}\left\langle\frac{k}{M}\right\rangle^{\mathrm{sgn}(\chi_D)}$$

- $$\sum_{D\mid M}\mathcal{T}_{D,M} = \mathcal{T}_{1,M} + \sum_{D\mid M,\ D\neq 1,M}\mathcal{T}_{D,M} + \mathcal{T}_M$$

Zhao’s method

$$v_2\left(\frac{L(f,\chi_M,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}}\right) \geq \mathfrak{v}_m\cdot r + c$$

還元