明星大学
MEISEI UNIVERSITY

幾何学 2 第 13 回

位相空間における連続写像

野本 慶一郎

明星大学 教育学部 教育学科

2025 年 1 月 8 日

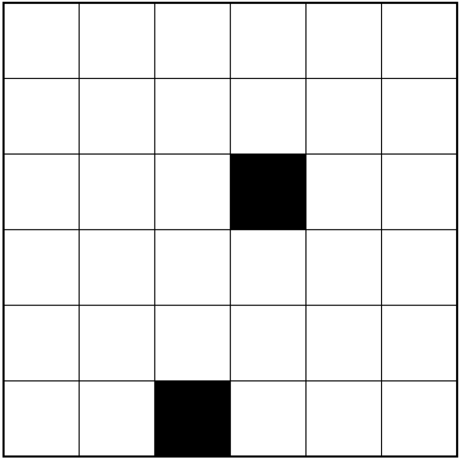
講義のページ

スライド

今日の数学パズル

- 6×6 のマス目から, 一マスだけ取り除かれた図形がある.
- この図形に, 縦 2 横 1 のドミノを重複無く埋め尽くすように配置することはできるか？

keyword: Hall の結婚定理



前回までの復習

開集合の重要性

- 講義第 9 回では, 距離空間が "同じ" というのを**同相写像**が存在することとして定義した. 同相写像とは, 特別な連続写像として定められるものであった.
- したがって距離空間を深く理解するためには, 連続写像の性質を調べることが重要である.

$$^{\forall}\varepsilon > 0,\ ^{\exists}\delta_{\varepsilon} > 0 \text{ s.t. } d_X(x, x_0) < \delta_{\varepsilon} \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

- そして第 7 回の講義で説明したように, 連続写像は**近傍** (特に開集合) を用いた, より単純な条件を満たすものと同じになる.

$$^{\forall}\varepsilon > 0,\ ^{\exists}\delta_{\varepsilon} > 0 \text{ s.t. } U(x_0, \delta_{\varepsilon}) \subset f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$$

$\rightarrow$ **開集合さえ上手く定義できれば, 距離関数は必要ないのでは？**
(もっと言えば, 点列の収束や閉集合等でも同様)
$\rightarrow$ **位相空間へ一般化**

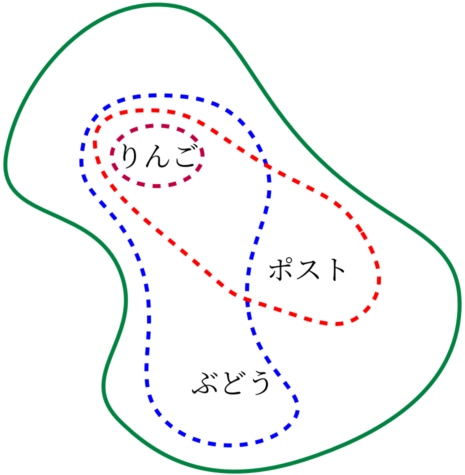
位相空間とは

- 距離空間における様々な定義・定理が**開集合**の性質で言い換えられることに着目して一般化された空間.

例: 点列の収束, 連続写像, 閉集合, etc.

- 距離関数を定めずに要素同士の近さが定義できる空間.

→ 距離関数を定めずに, どう開集合を定義する？
(距離があれば, 境界がない集合と定義できた.)



距離空間と位相空間における開集合

定理 (教科書 p.134-135 定理 10.8)

X を距離空間とするとき, 以下が成り立つ.

1. X と $\varnothing$ は, X の開集合.
2. X の**有限個**の開集合の**共通部分**は, X の開集合. $(U_1, \ldots, U_n$; 開集合 $\Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n$; 開集合)
3. X の**任意個**の開集合の**和集合**は, X の開集合. $(U_\lambda\ (\lambda \in \Lambda)$; 開集合 $\Rightarrow \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$; 開集合)

定義 (教科書 p.143-144 定義 11.1-11.2)

集合 X の部分集合族 (部分集合の集合) $\mathcal{O}$ が以下の 3 条件を満たすとき,
$\mathcal{O}$ を X の**位相構造**または**位相**という.

1. $X \in \mathcal{O}, \varnothing \in \mathcal{O}$.
2. $\mathcal{O}$ の有限個の要素の共通部分は, $\mathcal{O}$ の要素. $(U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{O} \Longrightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{O})$
3. $\mathcal{O}$ の任意個の要素の和集合は, $\mathcal{O}$ の要素. $(U_\lambda \in \mathcal{O}\ (\lambda \in \Lambda) \Longrightarrow \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O})$

$\mathcal{O}$ の要素を X の開集合と呼ぶ. 組 $(X, \mathcal{O})$(または単に X) を**位相空間**と呼ぶ.

位相空間は距離空間の一般化

- 上側は**距離空間における定理**, 下側は**位相空間の定義**という違いがあることに注意.
- また, 下側の定義において X が距離空間であれば
$$\mathcal{O} = \left\{ U \subset X \,\middle|\, U \text{ は } X \text{ の開集合} \right\}$$
とすると上側の定理より, $(X, \mathcal{O})$ は位相空間となる.
- したがって, 距離空間は位相空間であると言える. (位相空間は距離空間の一般化)
- 一般に, 与えられた集合 X とその上の位相 $\mathcal{O}$ に対して,
$(X, \mathcal{O})$ が位相空間であることを示すのは大変である.
- したがって, この講義では X が有限集合の場合の位相空間しか扱わない.
他にどの様な位相空間があるか気になる人は, 教科書やネットで調べてみてください.

位相空間の例

例

集合 $X = \{a, b, c\}$ を考える．このとき

$$\mathcal{O} := \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$$

と定める．このとき $(X, \mathcal{O})$ は位相空間となる．

- 例えば $\{a, b\}, \{a, c\} \in \mathcal{O}$ を取れば確かに

$$\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\} \in \mathcal{O}, \quad \{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\} = X \in \mathcal{O}$$

となっている．

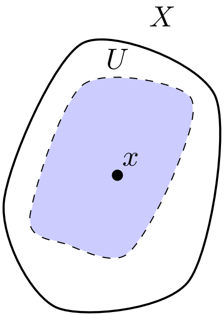
今日の内容

近傍の定義

- まずは, 距離空間における ε 近傍 $U(x, \varepsilon)$ の一般化となる対象を定義する.

定義 (教科書 p.144 定義 11.10)

位相空間 X の点 x に対し, $x \in U$ を満たす X の開集合 U を (X における) x の**近傍**と呼ぶ.



- もちろん, 一つの $x \in X$ に対して近傍は複数ありうる.

位相空間における連続写像の定義

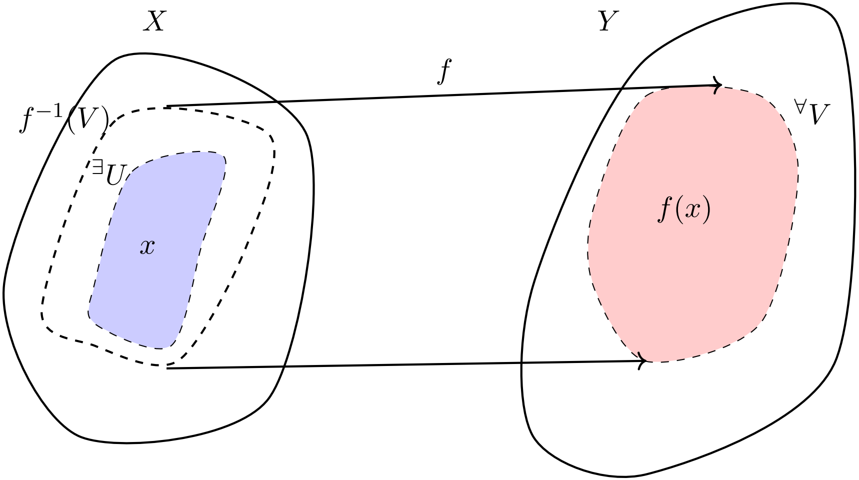
定義 (教科書 p.150 定義 11.24)

X, Y を位相空間, $f : X \to Y$ を写像, $x \in X$ とする. $f(x) \in Y$ の任意の近傍 V に対して

$$U \subset f^{-1}(V)$$

を満たす x の近傍 U が存在するとき, f は x で連続であるという.
特に全ての点 $x \in X$ で連続のとき, f は連続であるという.

位相空間における連続写像の定義のイメージ



位相空間における連続写像の同値性

定理 (教科書 p.151 定理 11.25)

位相空間 X から位相空間 Y への写像 f に対して, 以下の 3 条件は同値.

1. f は連続写像.
2. Y の任意の開集合 V に対して, $f^{-1}(V)$ は X の開集合. (開集合の引き戻しが開集合)
3. Y の任意の閉集合 F に対して, $f^{-1}(F)$ は X の閉集合. (閉集合の引き戻しが閉集合)

- **位相空間における連続写像は, 開集合の引き戻しが開集合である写像と言える.**
  (閉集合の引き戻しが閉集合, と言ってもよい)
- 位相空間は距離空間の一般化であること, $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^2$ 等が代表的な距離空間であることを踏まえれば, 微分積分学で扱う連続写像は, ε-δ 論法というややこしい解釈ではなく「開集合の引き戻しが開集合となる写像」であるという単純な解釈をすることができる.
- 講義で説明した知識だけで証明はできるが, 時間の都合上ここでは証明しない.

演習目標: 過去の演習課題を解く