幾何学 2 第 11 回

開集合や閉集合を用いた連続写像の特徴付け

野本 慶一郎

明星大学 教育学部 教育学科

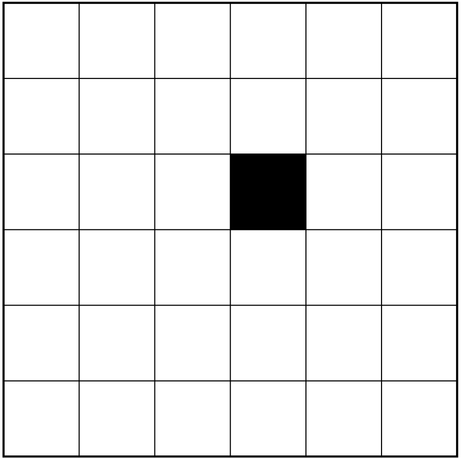
2024 年 12 月 4 日

講義のページ

スライド

今日の数学パズル

- 6×6 のマス目から, 一マスだけ取り除かれた図形がある.
- この図形に, 縦 2 横 1 のドミノを重複無く埋め尽くすように配置することはできるか？

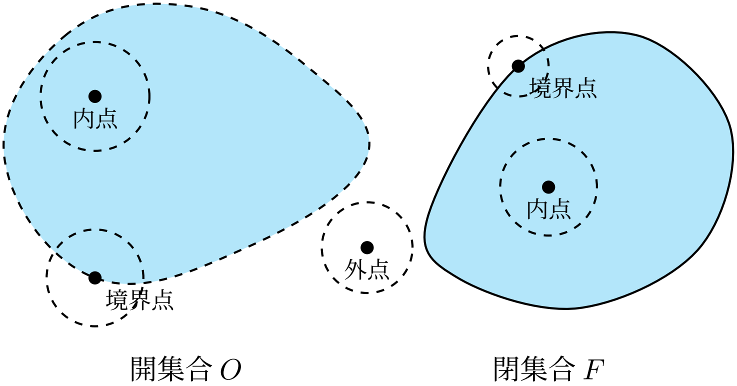


前回の復習

前回の復習と注意

前回, 開集合と閉集合を雑に定義しすぎたので正確な定義を述べる.

- 開集合 O: 境界点は全て含まない ($x \in X$ が O の境界点ならば $x \notin A$).
- 閉集合 F: 境界点は全て含む ($x \in X$ が F の境界点ならば $x \in F$).



開集合と閉集合の正確な定義

定義

X を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする.

- A が X の**開集合**であるとは, $x \in X$ が A の境界点ならば $x \notin A$ が成り立つことをいう.
- A が X の**閉集合**であるとは, $x \in X$ が A の境界点ならば $x \in A$ が成り立つことをいう.

- 混乱をなるべく招かないよう, 前回 (第 10 回) のスライドも変更しておきます.
- しかし前回は, $A \subset X$ が開集合とは
  任意の点 $x \in A$ が A の内点, すなわちある $\varepsilon > 0$ が存在して, $U(x, \varepsilon) \subset A$ が成り立つ
  こととして定義をした. これら二つの開集合の定義が一致することを証明しておこう.

証明

命題

距離空間 X の部分集合 $A \subset X$ に対して以下は同値.

1. $x \in X$ が A の境界点ならば $x \notin A$ が成り立つ.
2. 任意の点 $x \in A$ が A の内点 (ある $\varepsilon > 0$ が存在して $U(x, \varepsilon) \subset A$).

(証明)

- $[(1) \Rightarrow (2)]$. 任意に $x \in A$ を取る. このとき (1) の対偶を考えることで点 x は A の境界点ではない. よって点 x は A の内点または外点である. このとき明らかに x は A の内点.
- $[(2) \Rightarrow (1)]$. $x \in X$ を A の境界点とする. $x \in A$ だったと仮定する (背理法). このとき (2) より x は A の内点となるが, 境界点の定義は内点でも外点でもない点のことだったので矛盾. よって $x \notin A$. □

今日の内容

開集合と閉集合の関係

- 開集合と閉集合は別々に定義された．しかし開集合を用いて閉集合を定義することができる．逆に閉集合を用いても開集合を定義することができる．

命題 (教科書 p.133 補題 10.4)

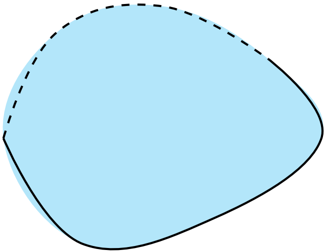
X を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする．このとき以下が成り立つ．

1. A が X の開集合ならば, $A^c(= X \setminus A)$ は X の閉集合である．
2. A が X の閉集合ならば, $A^c(= X \setminus A)$ は X の開集合である．

- 講義中には上記命題の証明はしないが, 演習問題として挙げておく．

開集合・閉集合に関する注意

- 先ほど述べたように開集合と閉集合は表裏一体の関係にある．しかし，**「開集合は閉集合では無い」「閉集合は開集合ではない」という主張は間違いである．**
- 例えば第 10 回の講義で証明したように，距離空間全体 X は開集合であって，その補集合は $\varnothing$ に他ならない．$\varnothing$ も開集合であったから，**全体 X は開集合かつ閉集合である．同様にして空集合 $\varnothing$ も開集合かつ閉集合である．**
- また，**「距離空間の部分集合は必ず開集合または閉集合」というのも間違いである．**
- 例えば，**境界を含む部分と含まない部分がある図形は開集合でも閉集合でもない．**



連続写像の開集合・閉集合を用いた特徴付け

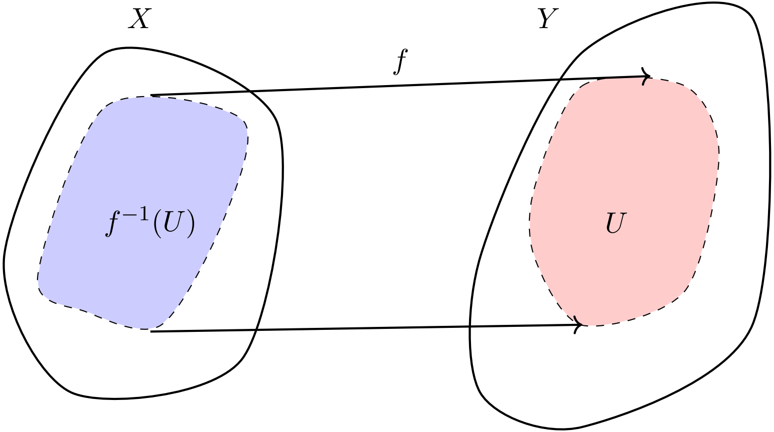
定理 (教科書 p.137 定理 10.12)

距離空間の間の写像 $f: X \to Y$ に対して以下は同値.

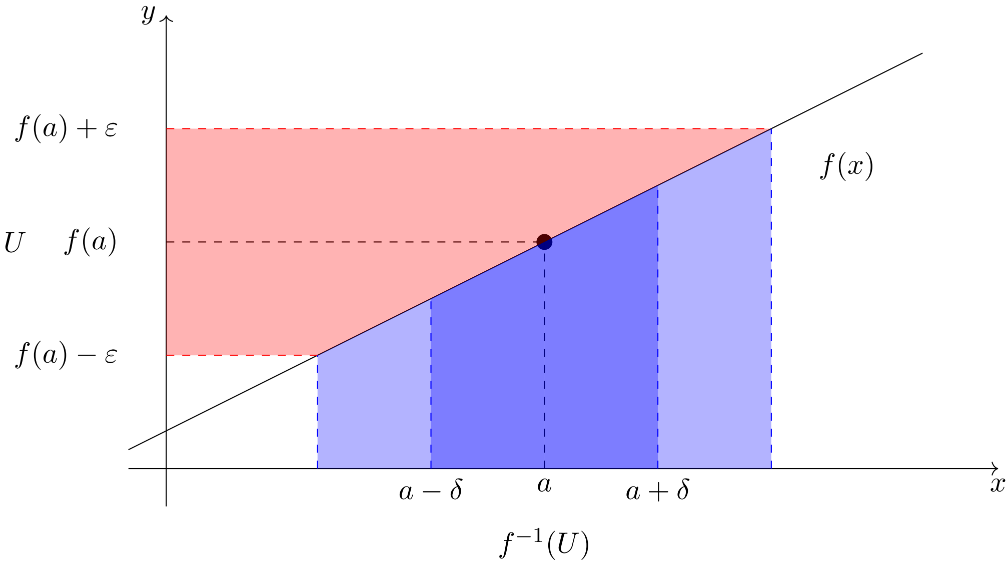
1. f は連続.
2. Y の任意の開集合 O に対して, $f^{-1}(O)$ は X の開集合.
3. Y の任意の閉集合 F に対して, $f^{-1}(F)$ は X の閉集合.

- **特に連続写像とは, 開 (閉) 集合の引き戻しが再び開 (閉) 集合である写像と言える.**
- ここでは定理の (1) と (2) が同値であることのみ示す.
  (2) と (3) の同値性は p.8 の命題からすぐに示すことができる.

距離空間の間の連続写像のイメージ



ε-δ 論法を用いた連続写像のイメージ



証明 $[(1) \Rightarrow (2)]$

- $O \subset Y$ を開集合とする. **任意に $x \in f^{-1}(O)$ を取る.**
  このとき $f(x) \in O$ かつ O は開集合なので, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $U(f(x), \varepsilon) \subset O$ である.
- したがって $f^{-1}(U(f(x), \varepsilon)) \subset f^{-1}(O)$ が成り立つ.
- ところで f は連続写像, 特に点 $x \in X$ でも連続なので第 7 回 p.7 の命題で示したように

$$\textbf{ある } \delta_\varepsilon > 0 \textbf{ が存在して}, \ U(x, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$$

  が成り立つ.
- 以上より

$$U(x, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U(f(x), \varepsilon)) \subset f^{-1}(O)$$

  が成り立つ. これは $f^{-1}(O)$ が開集合であることを示している. □

証明 $[(2) \Rightarrow (1)]$

- 任意に $x \in X$ を取り, f が点 x で連続であることを示す.
- **任意に $\varepsilon > 0$ を取る.** このとき $U(f(x), \varepsilon)$ は開集合である (証明略. 演習問題 10-2 参照).
- したがって仮定 (2) より $f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$ は開集合である.
- よって点 $x \in f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$ は内点, すなわち

  $$\textbf{ある } \delta_\varepsilon > 0 \textbf{ が存在して, } U(x, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$$

  が成り立つ.
- 以上より f は点 x で連続である ($\because$第 7 回 p.7 の命題). $\square$

演習目標: 開 (閉) 集合による連続写像の条件を証明できるようになる