距離空間における連続写像の同値条件

野本 慶一郎

2024/10/30

定理

距離空間の間の写像 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 及び $x_0\in X$ に対して以下は同値.

(i) f は点 $x_0\in X$ で連続, すなわち

$$^\forall\varepsilon>0\,^\exists\delta_\varepsilon>0 \text{ s.t. } d_X(x,x_0)<\delta_\varepsilon \Longrightarrow d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon.$$

(ii) 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $\delta_\varepsilon>0$ が存在して, $U(x_0,\delta_\varepsilon)\subset f^{-1}(U(f(x_0),\varepsilon))$.

(iii) (X,d_X) の任意の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ に対して, $x_n\to x_0 \implies f(x_n)\to f(x_0)$.

講義では (i) $\iff$ (ii) 及び $(i)\Rightarrow$ (iii) を示した. 本稿では (iii) $\Rightarrow$ (ii) を示すことで, 上記定理の証明を終えることにする.

定理

$(X,d_X),(Y,d_Y)$ を距離空間, $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ を写像とする. (X,d_X) の任意の点列 $\{x_n\}_{n\geq1}$ に対して $[x_n\to x\Longrightarrow f(x_n)\to f(x)]$ が成り立つならば

$$^\forall\varepsilon>0\,^\exists\delta_\varepsilon>0 \text{ s.t. } U(x_0,\delta_\varepsilon)\subset f^{-1}(U(f(x_0),\varepsilon))$$

となる.

Proof. 対偶を示す. すなわち

$$^\exists\varepsilon>0 \text{ s.t. } {}^\forall\delta_\varepsilon>0,\quad U(x_0,\delta_\varepsilon)\not\subset f^{-1}(U(f(x_0),\varepsilon)) \tag{1}$$

が成り立つとき, $[x_n\to x_0$ かつ $f(x_n)\nrightarrow f(x_0)]$ となる点列 $\{x_n\}_{n\geq1}$ が存在することを示せばよい. 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して, 式 (1) において $\delta_\varepsilon=1/n$ とすることで

$$x_n\in U\left(x_0,\frac{1}{n}\right),\quad x_n\notin f^{-1}(U(f(x_0),\varepsilon))$$

となる $x_n\in X$ が取れる. つまり

$$d_X(x_n,x_0)<\frac{1}{n},\quad d_Y(f(x_n),f(x_0))\geq\varepsilon \tag{2}$$

となる $x_n\in X$ が存在する. $n\in\mathbb{N}$ を全て動かすことにより点列 $\{x_n\}_{n\geq1}$ が得られるが, この点列が $[x_n\to x_0$ かつ $f(x_n)\nrightarrow f(x_0)]$ を満たすことを示す.

$x_n\to x_0$ であることと $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_0)=0$ であることは同値であった (講義第 4 回 p.17). 今, 式 (2) より

$$0\leq d_X(x_n,x_0)<\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty)$$

であるから, はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty}d_X(x_n,x_0)=0$, すなわち $x_n\to x_0$ である. 同様にして, 式 (2) より全ての $n\in\mathbb{N}$ に対して $\lim_{n\to\infty}d_Y(f(x_n),f(x_0))\neq0$, すなわち $f(x_n)\nrightarrow f(x_0)$ である. 以上より上で構成した点列 $\{x_n\}_{n\geq1}$ は $[x_n\to x_0$ かつ $f(x_n)\nrightarrow f(x_0)]$ を満たす. □