幾何学 2 第 6 回

距離空間における連続写像の定義

講義のページ

野本 慶一郎

明星大学 教育学部 教育学科

2024 年 10 月 23 日

スライド

今日の数学パズル

- 新幹線には「2 席シート」と「3 席シート」が用意されている．
- 団体の乗客が新幹線に乗車するとき，ひとりぼっちが出ないように座ることはできるか？

keywords: チキンマックナゲットの定理

前回の復習

関数の連続性

定義 (ε-δ 論法)

関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 $a \in \mathbb{R}$ で連続であるとは

$$\text{任意の}\ \varepsilon > 0\ \text{に対して　ある}\ \delta_\varepsilon > 0\ \text{が存在して}\ \ |x - a| < \delta_\varepsilon\ \ \text{ならば}\ \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

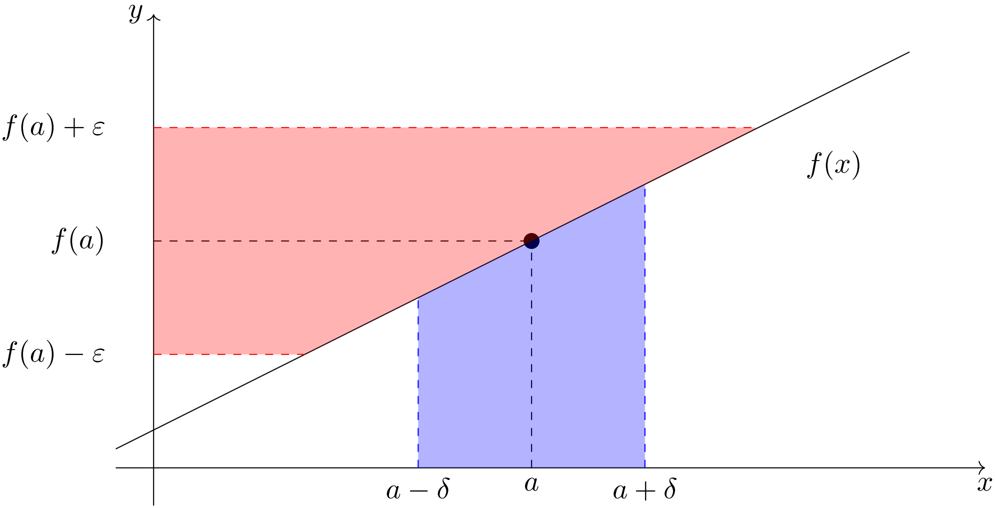
が成り立つことをいう．また，f が全ての $x \in \mathbb{R}$ で連続であるとき連続関数であるという．

- 噛み砕いて述べれば

どのような近さの基準 $\varepsilon > 0$ を取っても
「x を a との距離が δ_ε 未満になるよう近づければ，$f(x)$ と $f(a)$ の距離が ε 未満になる」
を満たす $\delta_\varepsilon > 0$ が取れる

となる．

連続関数のイメージ



今日の内容

今日の目的

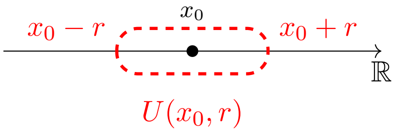
- 今日は, ε-δ 論法を用いて定義した関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の連続性の定義を拡張して, 距離空間の間の連続写像 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ を定義する.
- このような拡張を経ることで距離空間 (X,d_X) 自体をより詳しく調べることができたり, 例えば $f(x)=(x$ の多項式$)$ $(x\in\mathbb{R})$ の連続性を容易に示せるようになったりできる. (この辺りの内容に関しては次回以降に説明する.)

近傍

- 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の点 $x_0 \in \mathbb{R}$ での連続性では $|x - x_0| < r$ のような，
  点 x_0 からの距離が r 未満となる点 $x \in \mathbb{R}$ を考えることが大事であった．
- このような要素全体の集合は

$$U(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\} = \left\{x \in \mathbb{E}^1 \,\middle|\, d(x, x_0) < r\right\}$$

  と表され，**点 x_0 の r 近傍**と呼ばれる．ただし，d は 1 次元ユークリッド距離関数である．



- つまり以下が成り立つ．

$$x \in U(x_0, r) \iff d(x, x_0) < r \iff |x - x_0| < r.$$

  ただし $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は 1 次元ユークリッド距離関数である．

ε 近傍を用いた関数の連続性の言い換え

- 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続であるとは, 以下が成り立つことをいうのであった.
  任意の $\varepsilon > 0$ に対して ある $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ならば $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

命題

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続であることと, 1 次元ユークリッド距離関数 d に対して

任意の $\varepsilon > 0$ に対して ある $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して $d(x, x_0) < \delta_\varepsilon$ ならば $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

が成り立つことは同値.

命題

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続であることと

任意の $\varepsilon > 0$ に対して ある $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して $x \in U(x_0, \delta_\varepsilon)$ ならば $f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$

が成り立つことは同値.

距離空間における連続写像

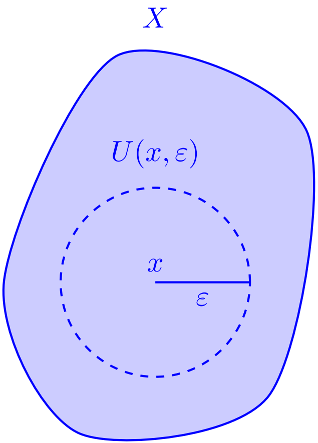
距離空間における ε 近傍

定義 (教科書 p.113 定義 9.1)

距離空間 (X, d) の点 x と $\varepsilon > 0$ に対して, 集合

$$U(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

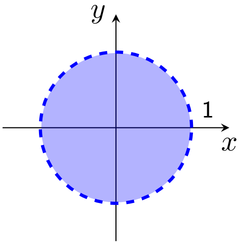
を点 x の ε **近傍**という.



- 距離空間 (X, d) または X における ε 近傍であることを強調するときには, $U(X, d, x, \varepsilon)$ または $U(X, x, \varepsilon)$ と書くことがある.

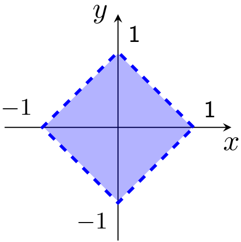
様々な ε 近傍

- ε 近傍は距離関数 d に依存する．すなわち，
  同じ集合でも距離関数が変われば ε 近傍の形状も変わることに注意.
- 以下は, $\mathbb{R}^2$ 上の 3 種類の距離関数に対する原点 O の ε 近傍 $U(O,\varepsilon)$ の図を示す. $(\varepsilon = 1)$



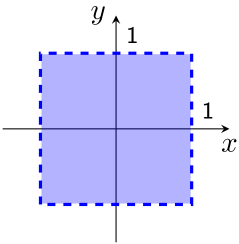
ユークリッド距離関数

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i - y_i)^2}$$



マンハッタン距離関数

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i|$$

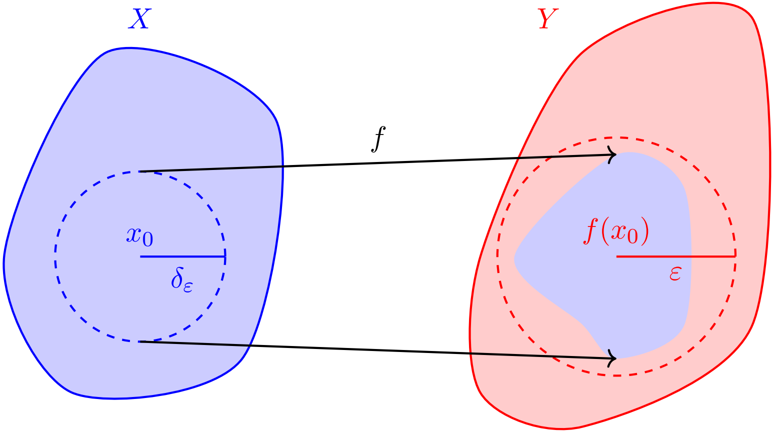


マックス距離関数

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \max_{1\le i\le 2}\{|x_i - y_i|\}$$

距離空間における連続写像のイメージ図

- 距離空間においても ε 近傍を用いて連続写像が定義される．以下はそのイメージ図である．



ε 近傍を用いた連続写像の定義

- 以降, 距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ に対してその間の写像 $f : X \to Y$ を

$$f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$$

と書くことがある.

定義

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする. **写像 $f : X \to Y$ が点 $x_0 \in X$ で連続**であるとは, 以下を満たすことをいう.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して ある $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して $d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon$ ならば $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

特に**全ての $x_0 \in X$ で連続のとき, f は連続写像**であるという.

- もちろん

「$d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon$」→「$x \in U(x_0, \delta_\varepsilon)$」,「$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$」→「$f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$」

と置き換えてもよい.

連続写像の例

例

写像 $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2, (x, y) \mapsto (2x, 3y)$ は連続写像である.

(証明の概要) 示すべきことは全ての点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{E}^2$ で連続であること, すなわち

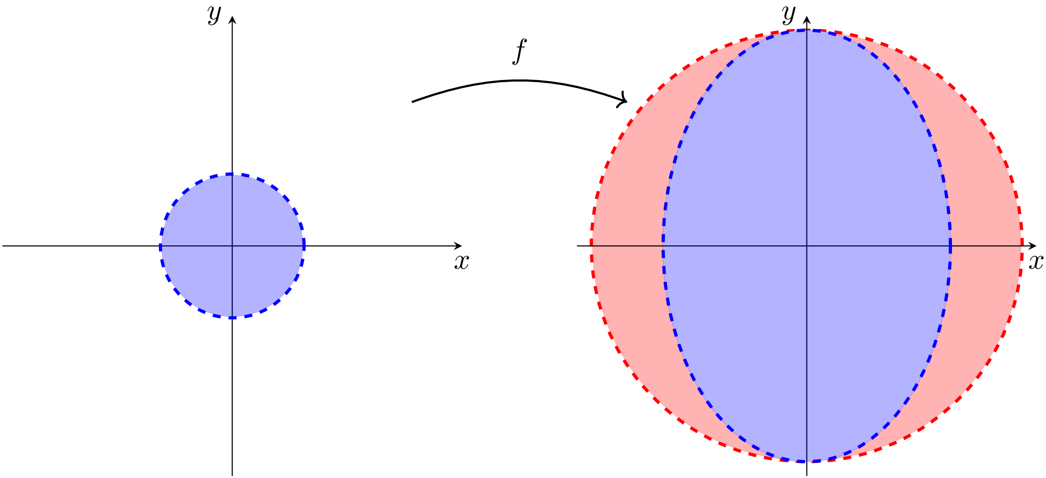
$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して ある } \delta_\varepsilon > 0 \text{ が存在して}$$
$$(x, y) \in U((x_0, y_0), \delta_\varepsilon) \text{ ならば } f(x, y) \in U(f(x_0, y_0), \varepsilon)$$

が成り立つことである. 近傍の定義を書き下せば

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して ある } \delta_\varepsilon > 0 \text{ が存在して}$$
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_\varepsilon \text{ ならば } \sqrt{(2x - 2x_0)^2 + (3y - 3y_0)^2} < \varepsilon$$

である. そしてそのような δ_ε は, $0 < \delta_\varepsilon < \varepsilon/3$ を満たすように取ればよい. □

$f(x, y) = (2x, 3y)$ の図



原点中心, 半径 $\varepsilon/3$ の円

原点中心, 半径 ε の円

演習目標: 距離空間における連続関数の定義を理解する