幾何学 2 第 5 回

距離空間の性質 (連続写像)

野本 慶一郎

明星大学 教育学部 教育学科

2024 年 10 月 16 日

講義のページ

スライド

今日の数学パズル

この教室に同じ誕生日の人がいる確率は？

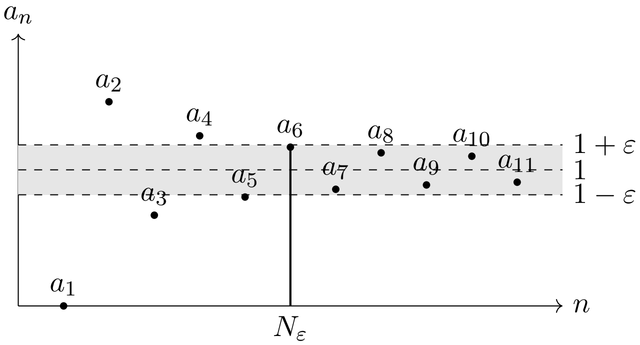
その確率は直感と一致するか？

前回の復習

収束する数列イメージ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \text{任意の}\,\varepsilon > 0\,\text{に対して ある}\,N_\varepsilon \in \mathbb{N}\,\text{が存在して}\,N_\varepsilon < n\,\text{ならば}\,|a_n - \alpha| < \varepsilon$$



今日の内容

距離空間の比較のために

- 「もの」に関する理解を深めるには，その「もの」が他の「もの」と比べてどのように違うのか？　ということを知るのが大事となる．
- 同様に「距離空間をより深く知る」ためには「二つの距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を比較する」ことが重要となる．
- その比較を行うための道具が

  連続写像 $X \to Y$

  である．
- 今日は距離空間における連続写像について学ぶが，その前に高校までで学習した「関数の連続性」を深掘りする．

関数の連続性再考

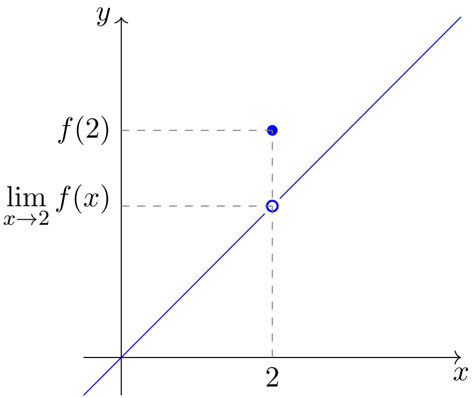
- 高校では, 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が点 $a\in\mathbb{R}$ で連続であるとは

  x を a に**限りなく近づける**と
  $f(x)$ は $f(a)$ に**限りなく近づく**

  と説明された. すなわち

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

- しかしこの定義だと,「限りなく」という曖昧な言葉が含まれてしまい,
  個人によって解釈が異なってしまう可能性がある.



$x=2$ で不連続な $f(x)$ の例

$$\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$$

「$f(x)$ は $f(a)$ に限りなく近い」の言い換え

- では $f(x)$ が $f(a)$ に限りなく近いというとき, どれくらい近ければよいのだろうか?
  つまり $f(x)$ と $f(a)$ の間の距離 $|f(x) - f(a)|$ はいくつ未満であればよいのだろうか?
- 前ページでも述べたように,「限りなく」というのは主観に依る.
  例えば $|f(x) - f(a)| < 0.1$ や $|f(x) - f(a)| < 0.01$ なら大抵は近いと思うかもしれない.
  極端な話だが, $|f(x) - f(a)| < 10000$ でも近いと思う人はいるかもしれない:
- しかし**限りなく**近づくというのは, **誰から見ても**近い必要がある.
  つまり具体的ないくつかの基準 (上記の例で言えば 0.1, 0.01, 10000 等) に限らず,
  どのような正の値 ε **に対しても** $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である必要がある:

$$\text{「}f(x)\text{ は }f(a)\text{ に限りなく近い」} = \text{「\textbf{任意の} }\varepsilon > 0\text{ \textbf{に対して} }|f(x) - f(a)| < \varepsilon\text{」}$$

「x は a に限りなく近い」の言い換え

- したがって,「x を a に限りなく近づけると $f(x)$ は $f(a)$ に限りなく近づく」というのは

  任意の $\varepsilon > 0$ に対して x を a に限りなく近づけると $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ とできる

  と言い換えることができる.

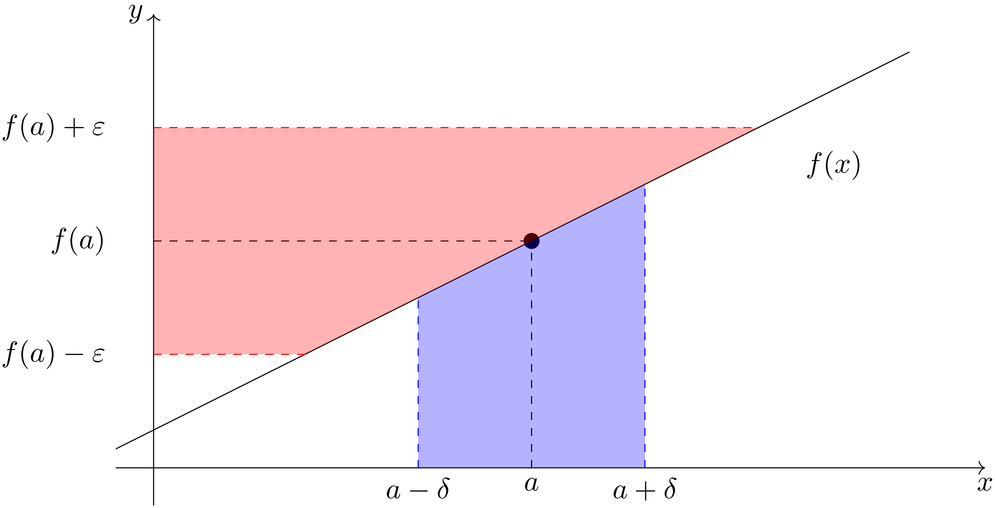
- では x はどれくらい a に近づければよいのだろうか？
  例えば $|x - a| < 0.001$ や $|x - a| < 0.0001$ なら大抵は近いと思うかもしれない.
  極端な話, $|x - a| < 100$ 程度でも十分近いと思う人はいるかもしれない.

- しかし一番気にするべきは「$f(x)$ **と** $f(a)$ **の間の距離は** ε **未満にできるか？**」
  すなわち「**不等式** $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ **が成り立つかどうか？**」なので
  この**不等式が成り立つ程度に** x **と** a **が近ければ十分**である.
  (例えば $|x - a| < 10$ で $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立てば $|x - a| < 0.001$ とかにする必要は全くない.)

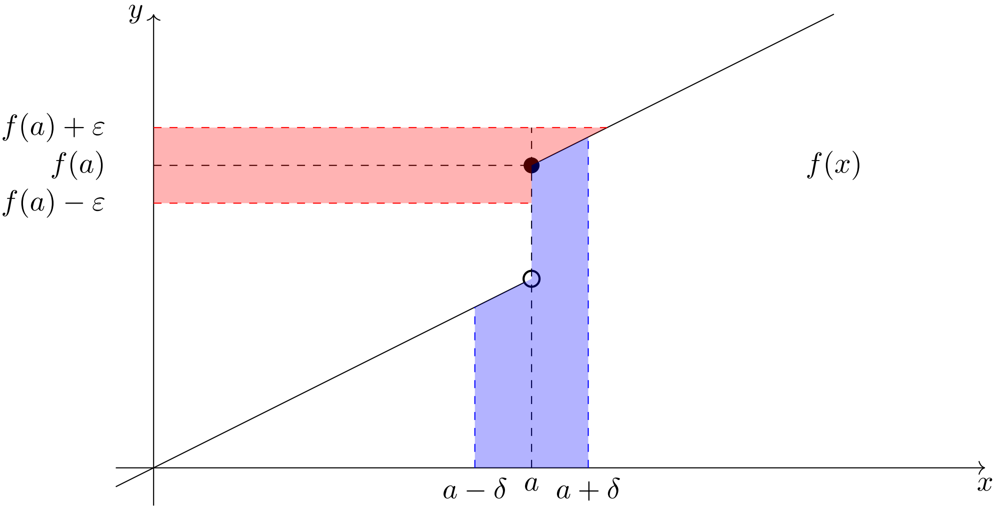
関数の連続性の言い換え

- つまり, $\varepsilon > 0$ によって変化 (依存) する $\delta_\varepsilon > 0$ **が取れて (大きさは関係ない),** $|x - a| < \delta_\varepsilon$ **を満たす** x **に対して** $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立てばよい.
- 結局,「x **を** a **に限りなく近づけると** $f(x)$ **は** $f(a)$ **に限りなく近づく**」というのは「**任意の** $\varepsilon > 0$ **に対して　ある** $\delta_\varepsilon > 0$ **が存在して** $|x - a| < \delta_\varepsilon$ **ならば** $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.」と言い換えができる．これが ε-δ 論法と呼ばれる関数の連続性の定義である.

連続関数のイメージ



不連続な関数のイメージ



関数の連続性

定義 (ε-δ 論法)

関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 $a \in \mathbb{R}$ で連続であるとは

$$\text{任意の}\,\varepsilon > 0\,\text{に対して}\quad\text{ある}\,\delta_\varepsilon > 0\,\text{が存在して}\quad |x-a| < \delta_\varepsilon \quad\text{ならば}\quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう．また, f が全ての $x \in \mathbb{R}$ で連続であるとき連続関数であるという．

- 噛み砕いて述べれば

  どのような近さの基準 $\varepsilon > 0$ を取っても
  「x を a との距離が δ_ε 未満になるよう近づければ, $f(x)$ と $f(a)$ の距離が ε 未満になる」
  を満たす $\delta_\varepsilon > 0$ が取れる

  となる．

- よって, 実際に連続性を確かめるときにはまず任意に $\varepsilon > 0$ を取るところから始まる．そして「条件を満たす $\delta_\varepsilon > 0$ はこのように取れる」と主張及び実証し, 議論が終了する．

例

例

数列 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x^2$ は $x=2$ で連続である.

- まず $\varepsilon=5$ と具体的に取ってみる. このとき $\delta_\varepsilon>0$ を $(0<)\,\delta_\varepsilon<1$ を満たすように取れば

  $$|x-2|<\delta_\varepsilon\,(<1) \Longrightarrow |f(x)-4|<\varepsilon(=5)$$

  が成り立つ. 実際, $|x-2|<\delta_\varepsilon$ のとき

  $$\begin{aligned}|f(x)-f(2)| = |(x-2)(x+2)| = |(x-2)((x-2)+4)| = \left|(x-2)^2+4(x-2)\right| &\\ \le |x-2|^2+4|x-2| \quad (\because \text{三角不等式}) &\\ < 1^2+4\times 1 \quad (\because |x-2|<1) &\\ = 5 = \varepsilon &\end{aligned}$$

  となる.

例 (続き): 任意の $\varepsilon > 0$ に対してどのように $\delta_\varepsilon > 0$ を取ればよいか？

- 次は $\varepsilon > 0$ を任意に取る．このとき $\delta_\varepsilon > 0$ で

$$|x-2| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left|x^2-4\right| < \varepsilon$$

  が成り立つようなものを探したい．
- 仮定「$|x-2| < \delta_\varepsilon$」を使うという意識をした上で, $\left|x^2-4\right|$ に対して次の評価を行う．

$$\begin{aligned}\left|x^2-4\right| = |(x-2)(x+2)| = |(x-2)((x-2)+4)| &= \left|(x-2)^2+4(x-2)\right| \\ &\leq |x-2|^2 + 4|x-2| \\ &< \delta_\varepsilon^2 + 4\delta_\varepsilon = (\delta_\varepsilon+2)^2 - 4\end{aligned}$$

- したがって, $(\delta_\varepsilon+2)^2 - 4 < \varepsilon$ を満たすように $\delta_\varepsilon > 0$ が取れれば, $\left|x^2-4\right| < \varepsilon$ となって目的が果たされる．
- そしてそのような δ_ε は, $(\delta_\varepsilon+2)^2 - 4 < \varepsilon$ を式変形することにより

$$(0 <)\, \delta_\varepsilon < \sqrt{4+\varepsilon} - 2$$

  を満たすように取ればよい．($\sqrt{4+\varepsilon} - 2 > 0$ であることに注意.)

演習目標: 関数の連続性の定義を理解する