1. 数列 $a_n = 1/2n$ $(n \geq 1)$ に対して, 以下の問いに答えよ.
   (a) $\varepsilon = 0.1$ に対して $|a_n| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ.
   (解答例)
   $|a_n| < \varepsilon$, すなわち $1/2n < 0.1$ を n について解いて $n > 5$.

   (b) $\varepsilon = 0.01$ に対して $|a_n| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ.
   (解答例)
   $|a_n| < \varepsilon$, すなわち $1/2n < 0.01$ を n について解いて $n > 50$.

   (c) 実数 $\varepsilon(>0)$ に対して $|a_n| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ.
   (解答例)
   $|a_n| < \varepsilon$, すなわち $1/2n < \varepsilon$ を n について解いて $n > 1/2\varepsilon$.

   (d) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を ε-N 論法に基づいて示せ.
   (解答例)
   任意に $\varepsilon > 0$ を取る. このとき $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を, $N_\varepsilon > 1/2\varepsilon$ を満たすように取ると, $N_\varepsilon < n$ ならば $|a_n - 0| < \varepsilon$ が成り立つ. 実際,

$$
\begin{aligned}
|a_n - 0| &= \frac{1}{2n} \quad (\because a_n \text{の定義}) \\
&< \frac{1}{2N_\varepsilon} \quad (\because N_\varepsilon < n) \\
&< \varepsilon \quad (\because N_\varepsilon > 1/2\varepsilon)
\end{aligned}
$$

   である. したがって $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を得る.

2. 数列 $a_n = 1 - 1/n^2$ $(n \geq 1)$ に対して, 以下の問いに答えよ.
   (a) $\varepsilon = 0.1$ に対して $|a_n - 1| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ.
   (解答例)
   $|a_n - 1| < \varepsilon$, すなわち $1/n^2 < 0.1$ を n について解いて $n > \sqrt{10}$.

   (b) $\varepsilon = 0.01$ に対して $|a_n - 1| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ.
   (解答例)
   $|a_n - 1| < \varepsilon$, すなわち $1/n^2 < 0.01$ を n について解いて $n > 10$.

   (c) 実数 $\varepsilon(>0)$ に対して $|a_n - 1| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ.
   (解答例)
   $|a_n - 1| < \varepsilon$, すなわち $1/n^2 < \varepsilon$ を n について解いて $n > 1/\sqrt{\varepsilon}$.

   (d) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ を $\varepsilon - N$ 論法に基づいて示せ.
   (解答例)
   任意に $\varepsilon > 0$ を取る. このとき $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を, $N_\varepsilon > 1/\sqrt{\varepsilon}$ を満たすように取ると, $N_\varepsilon < n$ ならば $|a_n - 1| < \varepsilon$ が成り立つ. 実際,

$$
\begin{aligned}
|a_n - 1| &= \frac{1}{n^2} \quad (\because a_n \text{の定義}) \\
&< \frac{1}{N_\varepsilon^2} \quad (\because N_\varepsilon < n) \\
&< \varepsilon \quad (\because N_\varepsilon > 1/\sqrt{\varepsilon})
\end{aligned}
$$

   である. したがって $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ を得る.

3. 漸化式 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2}$ で定まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(a) 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は収束すると仮定する. このとき極限値 $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ を, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ であることを利用して求めよ.

(解答例)

与えられた漸化式において両辺の n に関する極限を考えると, $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}$ を得る. これを解いて $\alpha = 1$.

(b) $|a_n - 1| = \frac{1}{2}|a_{n-1} - 1|$ $(n \geq 2)$ を証明せよ.

(解答例)

漸化式の定義より

$$|a_n - 1| = \left|\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2} - 1\right| = \left|\frac{1}{2}a_{n-1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}|a_{n-1} - 1|.$$

(c) $|a_n - 1| = \frac{1}{2^n}$ $(n \geq 1)$ を証明せよ.

(解答例)

関係式 $|a_n - 1| = \frac{1}{2}|a_{n-1} - 1|$ を繰り返し適用することで

$$\begin{aligned}
|a_n - 1| &= \frac{1}{2}|a_{n-1} - 1| \\
&= \frac{1}{2^2}|a_{n-2} - 1| \quad (\because |a_{n-1} - 1| = \frac{1}{2}|a_{n-2} - 1|) \\
&= \frac{1}{2^3}|a_{n-3} - 1| \quad (\because |a_n - 2| = \frac{1}{2}|a_{n-3} - 1|) \\
&\ \ \vdots \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}|a_1 - 1| \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} \quad (\because a_1 = 1/2) \\
&= \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

(d) ε-N 論法に基づいて, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であることを証明せよ.

(解答例)

任意に $\varepsilon > 0$ を取る. このとき $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を, $N_\varepsilon > \log_2(1/\varepsilon)$ を満たすように取ると, $N_\varepsilon < n$ ならば $|a_n - 1| < \varepsilon$ が成り立つ. 実際,

$$\begin{aligned}
|a_n - 1| &= \frac{1}{2^n} \\
&< \frac{1}{2^{N_\varepsilon}} \quad (\because N_\varepsilon < n) \\
&< \varepsilon \quad (\because N_\varepsilon > \log_2(1/\varepsilon))
\end{aligned}$$

となる. したがって $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ を得る.

4. $(\mathbb{R}^2, d)$ を距離空間とする. ただし, 距離関数 d はマンハッタン距離関数

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i|$$

とする. このとき点列 $x_n = (1/n, 1 + 1/n^2)$ $(n \geq 1)$ の極限点は $x = (0, 1)$ であることを示せ.

(解答例)

$\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$ であることを示せばよい．点 $x, x_n \in \mathbb{R}^2$ の間のマンハッタン距離は

$$d(x, x_n) = \left|0 - \frac{1}{n}\right| + \left|1 - \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

である．したがって

$$\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 0$$

が成り立つ．以上より示された．