1. マンハッタン関数 $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad (\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n))$$

と定義する．このとき $(\mathbb{R}^n, d)$ が距離空間となることを証明せよ．(つまり講義中に行った証明をもう一度自分の手で書き, d が $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数であることを示してください.)

2. 次のように定められた関数 d は全て $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数ではない．それぞれの d について反例を挙げよ．ただし, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ とする．
   (a) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} - 1$.
   (b) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left|x_1^2 - y_1^2\right| + \left|x_2^2 - y_2^2\right|$.
   (c) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(2x_1 - y_1)^2 + (2x_2 - y_2)^2}$.
   (d) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$.

3. 区間 $I = [0, 1]$ 上の実数値連続関数全体の集合を $C(I)$ で表す．このとき関数 $d : C(I) \times C(I) \to \mathbb{R}$ を

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

と定める．このとき d は $C(I)$ 上の距離関数であることを証明せよ (したがってこのとき $(C(I), d)$ は距離空間となる).