1. マンハッタン関数 $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad (\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n))$$

と定義する．このとき $(\mathbb{R}^n, d)$ が距離空間となることを証明せよ．(つまり講義中に行った証明をもう一度自分の手で書き，d が $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数であることを示してください.)

(解答例)

(1) マンハッタン距離関数の定義から，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \geq 0$$

が従う．さらに上記式より $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ であることと全ての i $(1 \leq i \leq n)$ について $x_i = y_i$ であることは同値，すなわち $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ であることは同値である．

(2) マンハッタン距離関数の定義から，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

が成り立つ．

(3) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i + y_i - z_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| \\ &= d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \end{aligned}$$

が成り立つ．

以上より $(\mathbb{R}^n, d)$ は距離空間である． □

2. 次のように定められた関数 d は全て $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数ではない．それぞれの d について反例を挙げよ．ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ とする．

(a) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} - 1$.

(解答例)

$\boldsymbol{x} = (0, 0), \boldsymbol{y} = (0, 0)$ が反例．実際

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{0^2 + 0^2} - 1 = -1 < 0$$

である．

(b) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left|x_1^2 - y_1^2\right| + \left|x_2^2 - y_2^2\right|$.

(解答例)

$\boldsymbol{x} = (1, 0), \boldsymbol{y} = (-1, 0)$ が反例．実際，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ であるが

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left|1^2 - (-1)^2\right| + \left|0^2 - 0^2\right| = 0$$

である．

(c) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{(2x_1 - y_1)^2 + (2x_2 - y_2)^2}$.
(解答例)
$\boldsymbol{x} = (0,0), \boldsymbol{y} = (1,0)$ が反例．実際

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{(0-1)^2 + (0-0)^2} = 1$$
$$d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2} = 2$$

となって $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ である．

(d) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$.
(解答例)
$\boldsymbol{x} = (0,0), \boldsymbol{y} = (1,0), \boldsymbol{z} = (2,1)$ が反例．実際

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = (0-2)^2 + (0-1)^2 = 5$$
$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (0-1)^2 + (0-0)^2 = 1$$
$$d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (1-2)^2 + (0-1)^2 = 2$$

なので三角不等式 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ を満たしていない．

3. 区間 $I = [0,1]$ 上の実数値連続関数全体の集合を $C(I)$ で表す．このとき関数 $d : C(I) \times C(I) \to \mathbb{R}$ を

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

と定める．このとき d は $C(I)$ 上の距離関数であることを証明せよ (したがってこのとき $(C(I), d)$ は距離空間となる)．
(解答例)
(1) 任意の $f, g \in C(I)$ に対して $d(f,g) \geq 0$ であることを示す．全ての $x \in I$ に対して $|f(x) - g(x)| \geq 0$ であるから

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \geq \int_0^1 0 dx = 0$$

となって示された．また，上記式より $d(f,g) = 0$ であることと $f = g$ であることは同値である．
(2) 任意の $f, g \in C(I)$ に対して $d(f,g) = d(g,f)$ であることは

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 |g(x) - f(x)| dx = d(g,f)$$

より従う．
(3) 任意の $f, g, h \in C(I)$ に対して

$$\begin{aligned} d(f,h) &= \int_0^1 |f(x) - h(x)| dx \\ &= \int_0^1 |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| dx \\ &\leq \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx + \int_0^1 |g(x) - h(x)| dx \\ &= d(f,g) + d(g,h) \end{aligned}$$

であるから三角不等式が成り立つ．
以上より，d は $C(I)$ 上の距離関数である．