明星大学
MEISEI UNIVERSITY

幾何学 2 第 2 回

ユークリッド距離 (距離の性質、特に三角不等式)

講義のページ

野本 慶一郎

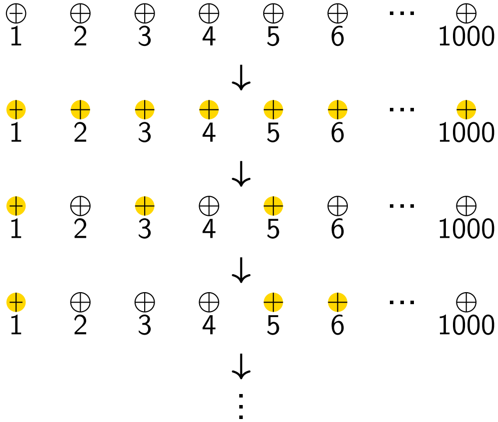
明星大学 教育学部 教育学科

2024 年 9 月 25 日

スライド

今日の数学パズル

- 1 〜 1000 の数字が書かれた電球が 1000 個ある．全て OFF の状態から次の操作を行う．



1 の倍数のスイッチ切り替え

2 の倍数のスイッチ切り替え

3 の倍数のスイッチ切り替え

- この操作を 1000 回まで行なったとき，最後に ON の状態の電球の数は何個か．

前回の復習

ユークリッド距離

定義 (教科書 p.101 定義 8.1)

$\mathbb{R}^n$ の任意の 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に対して

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \quad \left(= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\right)$$

を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 間の**ユークリッド距離**という．

例 ($\mathbb{R}^2$)

$\boldsymbol{x} = (-1, 2), \boldsymbol{y} = (3, -5)$ に対するユークリッド距離は次のように計算される:

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-(-5))^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}.$$

ユークリッド空間

- ユークリッド距離 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は, $\mathbb{R}^n$ の 2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して距離という実数を対応させる関数として見ることができる:

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

この写像 d を**ユークリッド距離関数**という.

定義 (教科書 p.102 定義 8.3)

$\mathbb{R}^n$ とユークリッド距離関数 d の組 $(\mathbb{R}^n, d)$ を n 次元ユークリッド空間といい, $\mathbb{E}^n$ で表す.

$$\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d)$$

- つまり「$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{E}^n$」のように書いたときは, 2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 間の距離は

ユークリッド距離で測る

ということ.

今日の内容

ユークリッド距離の基本 3 性質

定理 (教科書 p.103 定理 8.5)

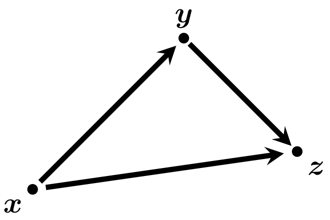
$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ をユークリッド距離関数とする．このとき任意の 3 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{E}^n$ に対して，以下の 3 つの性質が成り立つ．

1. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$．さらに $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$．
2. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$．
3. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$．(三角不等式)

- 三角不等式は

  遠回りすると距離が増える

  というごく自然な現象を数式で表現したものである．



証明 ($n = 2$ のとき)

以下では $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2), \boldsymbol{z} = (z_1, z_2)$ と成分表示されているとする．

1. ユークリッド距離の定義より

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \geq 0 \tag{1}$$

   が成り立つ．さらに式 (1) の等号が成り立つのは $x_1 = y_1$ かつ $x_2 = y_2$ のときに限る．つまり

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$$

2. 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $(x - y)^2 = (y - x)^2$ であるから

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

   である．

証明

3. 示したい三角不等式 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \le d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ を書き下すと以下のようになる.

$$\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} \le \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} + \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2} \tag{2}$$

式を簡単にするため, $a_i := x_i - y_i,\ b_i := y_i - z_i$ とおく. このとき $x_i - z_i = a_i + b_i$ であるから, 式 (2) は以下のように書き換えられる.

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \tag{3}$$

式 (3) の両辺の値はいずれも非負であるから, 両辺を 2 乗した以下の式を示せばよい.

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 \le \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right)^2 \tag{4}$$

証明

式 (4) を示す．(右辺) − (左辺) を計算すると

$$
\begin{aligned}
&(\text{右辺}) - (\text{左辺}) \\
=&(a_1^2 + a_2^2) + 2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} + (b_1^2 + b_2^2) - (a_1 + b_1)^2 - (a_2 + b_2)^2 \\
=&(a_1^2 + a_2^2) + 2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} + (b_1^2 + b_2^2) - (a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2) - (a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2) \\
=&2\left(\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} - (a_1b_1 + a_2b_2)\right) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

を得る．

証明

ここで一度, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ とおく. ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とおくと

$$\begin{aligned}\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} &= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \\ &\geq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta \\ &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2\end{aligned}$$

が成り立つ. よって式 (5) より

$$(\text{右辺}) - (\text{左辺}) = 2\left(\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} - (a_1 b_1 + a_2 b_2)\right) \geq 0$$

であるから (右辺) $\geq$ (左辺) が成り立つ. $\square$

Cauchy–Shwartz の不等式

- 先ほどの証明では不等式

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq a_1b_1 + a_2b_2$$

を示した．これは Cauchy–Shwartz の不等式の特殊な場合である．

命題 (Cauchy–Shwartz の不等式)

実数 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ に対して

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2.$$

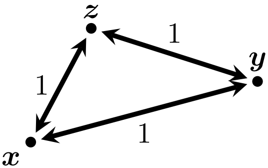
補足 pdf(証明)

- **確認テストでは Cauchy–Shwartz の不等式は証明無しに用いて良いことにします.**

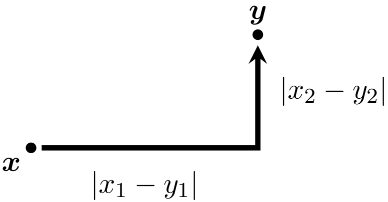
ユークリッド距離と似た性質をもつ “距離”

- ユークリッド距離以外にも, 先ほど示した三性質を満たす “距離” がある.
  $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ としたとき, 例えば次の d_0, d_1 は三性質を満たす.

$$d_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}) \\ 0 & (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}) \end{cases}$$



$$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$



演習目標: 自身の力で証明を書き切る