1. $\mathbb{E}^4$ における以下の 2 点 P, Q 間のユークリッド距離を計算せよ．
   (a) $P = (3, 0, -2, 1), Q = (2, 3, -4, 5)$ [5点]
   d を 4 次元ユークリッド距離関数とする．
   $$d(P, Q) = \sqrt{(3-2)^2 + (0-3)^2 + (-2-(-4))^2 + (1-5)^2} = \sqrt{1+9+4+16} = \sqrt{30}.$$
   (b) $P = (0, -4, 6, 3), Q = (-1, 4, 3, -2)$ [5点]
   d を 4 次元ユークリッド距離関数とする．
   $$d(P, Q) = \sqrt{(0-(-1))^2 + (-4-4)^2 + (6-3)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{1+64+9+25} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}.$$

2. 次のように定められた関数 $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は全て $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数ではない．それぞれの d について反例を挙げよ．ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ とする．
   (a) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} - 1.$ [5点]
   $\boldsymbol{x} = (0, 0), \boldsymbol{y} = (0, 0)$ 等．$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < 0$ となる．
   (b) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1^2 - y_1^2| + |x_2^2 - y_2^2|.$ [5点]
   $\boldsymbol{x} = (1, 0), \boldsymbol{y} = (-1, 0)$ 等．$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ だが $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ となる．
   (c) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \min\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$．ただし $\min\{a, b\}$ は，a と b のうち小さい方の値を表す記号である． [5点]
   $\boldsymbol{x} = (0, 0), \boldsymbol{y} = (1, 0)$ 等．$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ だが $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ となる．
   (d) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2.$ [5点]
   $\boldsymbol{x} = (0, 0), \boldsymbol{y} = (1, 0), \boldsymbol{z} = (2, 1)$ 等．三角不等式を満たさない．
   $$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = 5, \quad d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1, \quad d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 2$$

3. 写像 $d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を
   $$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i| \quad (\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2))$$
   により定める．このとき以下の問いに答えよ．
   (a) d_1 は $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数であることを示せ (すなわち $(\mathbb{R}^2, d_1)$ が距離空間であることを示せ)． [20点]
      i. $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$．さらに $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$． [5/20]
      d_1 の定義より
      $$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq 0 \tag{1}$$
      である．また，式 (1) の等号が成り立つのは $x_1 = y_1$ かつ $x_2 = y_2$ のときに限る．つまり $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ であることと $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ であることは同値である．
      ii. $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$． [5/20]
      任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $|a - b| = |b - a|$ であることより
      $$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = d_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$$

iii. $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$. [10/20]
示したい不等式は

$$|x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| \tag{2}$$

である．不等式 (2) を示す．任意の実数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $|a + b| \leq |a| + |b|$ が成り立つことより

$$\begin{aligned} |x_1 - z_1| &= |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| \\ &\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| \qquad (3) \\ |x_2 - z_2| &= |x_2 - y_2 + y_2 - z_2| \\ &\leq |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| \qquad (4) \end{aligned}$$

を得る．したがって不等式 (3), (4) を足し合わせることで不等式 (2) を得る．

(b) 距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_1)$ の 3 点 $\boldsymbol{x} = (1, -2), \boldsymbol{y} = (-3, 1), \boldsymbol{z} = (k, -3)$ について，点 $\boldsymbol{x}$ は点 $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ から等距離な位置にある．このとき k の値を全て求めよ． [10点]
$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |1 - (-3)| + |-2 - 1| = 4 + 3 = 7$ である．また，$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = |1 - k| + |-2 - (-3)| = |k - 1| + 1$ である．したがって題意より

$$|k - 1| + 1 = 7 \Longleftrightarrow k - 1 = \pm 6 \Longleftrightarrow k = 7, -5$$

を得る．

(c) 距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_1)$ における点列 $\boldsymbol{x}_n = (1 - \frac{3}{n}, -2 + \frac{1}{n^2})$ $(n \geq 1)$ の極限点は $\boldsymbol{x} = (1, -2)$ であることを示せ． [10点]
$\displaystyle\lim_{n \to \infty} d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_n) = 0$ を示せばよい．定義より

$$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_n) = \left|1 - 1 + \frac{3}{n}\right| + \left|-2 + 2 - \frac{1}{n^2}\right| = \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \to 0 \ (n \to \infty)$$

である．よって示された．

4. 以下の問いに答えよ．

(a) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $x = x_0$ で連続であることの ε-δ 論法に基づく定義を答えよ． [10点]
任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して，$|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ならば $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ が成り立つ．

(b) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 1$ が連続写像であることを ε-δ 論法に基づき示せ． [20点]
全ての点 $x_0 \in \mathbb{R}$ で f が連続であることを示す．
任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta_\varepsilon > 0$ を $0 < \delta_\varepsilon < \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2} - |x_0|$ を満たすように取れば

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

が成り立つ．実際，そのような δ_ε に対して $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ならば

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left|(x^2 - 1) - (x_0^2 - 1)\right| \\ &= |(x - x_0)(x + x_0)| \\ &= |(x - x_0)((x - x_0) + 2x_0)| \\ &= \left|(x - x_0)^2 + 2x_0(x - x_0)\right| \\ &\leq |x - x_0|^2 + 2|x_0| \cdot |x - x_0| \quad (\because \text{三角不等式}) \\ &< \delta_\varepsilon^2 + 2|x_0|\delta_\varepsilon \quad (\because |x - x_0| < \delta_\varepsilon) \\ &= (\delta_\varepsilon + |x_0|)^2 - |x_0|^2 \\ &< \varepsilon \quad (\because \delta_\varepsilon < \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2} - |x_0|) \end{aligned}$$

である．よって示された．