1. $\mathbb{E}^4$ における以下の 2 点 P, Q 間のユークリッド距離を計算せよ．
   (a) $P = (1, -2, 3, 4), Q = (4, 0, -1, 2)$

   (b) $P = (2, -3, 1, 0), Q = (-2, 1, 0, 3)$

2. マックス距離関数 $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{1 \le i \le n} \{|x_i - y_i|\} \quad (\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n))$$

   と定める．ただし，$\max_{1 \le i \le n} \{a_i\}$ は集合 $\{a_1, \ldots, a_n\}$ の中で最大の要素を表す記号である．このとき d_∞ は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数であることを示せ．

3. 次のように定められた関数 $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は全て $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数ではない．それぞれの d について反例を挙げよ．ただし, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ とする．

(a) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1 - y_1)^3 + (x_2 - y_2)^3$.

(b) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \min\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$.

4. 以下の問いに答えよ．

(a) 実数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束することの ε-N 論法に基づく定義を答えよ．

(b) $a_n = \frac{3}{n^2}$ $(n \geq 1)$ で定義される数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を考える．$\varepsilon = 0.1$ に対して $|a_n| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ．

(c) (b) で定義した数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を ε-N 論法に基づき示せ．

5. $(\mathbb{R}^2, d)$ を距離空間とする．ただし, 距離関数 d はマンハッタン距離関数

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|$$

とする．このとき $x_n = (3 - \frac{1}{n}, -2 + \frac{4}{n^2})$ $(n \geq 1)$ で定まる点列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ の極限点は $x = (3, -2)$ であることを示せ.

6. 以下の問いに答えよ.

(a) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $x = x_0$ で連続であることの ε-δ 論法に基づく定義を答えよ.

(b) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$ を考える．このとき, $\varepsilon = 0.1$ に対して

$$|x - 3| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - 10| < \varepsilon$$

を満たす δ_ε >0 の条件を答えよ.

(c) (b) で与えた関数 f が連続写像であることを ε-δ 論法に基づき示せ.