1. $\mathbb{E}^4$ における以下の 2 点 P, Q 間のユークリッド距離を計算せよ．

(a) $P = (1, -2, 3, 4), Q = (4, 0, -1, 2)$

(解答例)

$\mathbb{E}^4$ におけるユークリッド距離関数を d と表すと

$$d(P, Q) = \sqrt{(1-4)^2 + (-2-0)^2 + (3-(-1))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{9+4+16+4} = \sqrt{33}.$$

(b) $P = (2, -3, 1, 0), Q = (-2, 1, 0, 3)$

(解答例)

$\mathbb{E}^4$ におけるユークリッド距離関数を d と表すと

$$d(P, Q) = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-3-1)^2 + (1-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+16+1+9} = \sqrt{42}.$$

2. マックス距離関数 $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{1 \le i \le n} \{|x_i - y_i|\} \quad (\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n))$$

と定める．ただし，$\max_{1 \le i \le n} \{a_i\}$ は集合 $\{a_1, \dots, a_n\}$ の中で最大の要素を表す記号である．このとき d_∞ は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数であることを示せ．

(解答例)

(1) 任意の $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \ge 0$ であること，さらに $d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ と $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ が同値であることを示す．絶対値は非負の値を取るから

$$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{1 \le i \le n} \{|x_i - y_i|\} \ge 0$$

が成り立つ．さらに $\max_{1 \le i \le n} \{|x_i - y_i|\} = 0$ ならば全ての i $(1 \le i \le n)$ に対して $|x_i - y_i| = 0$，つまり $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ でなければならない．逆に $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ のとき $\max_{1 \le i \le n} \{|x_i - y_i|\} = 0$ が成り立つことは明らかである．したがって示された．

(2) 任意の $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d_\infty(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ が成り立つことは，絶対値の性質 $|a - b| = |b - a|$ $({}^\forall a, b \in \mathbb{R})$ から明らかである．

(3) 任意の $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n), \boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して三角不等式

$$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \le d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_\infty(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

が成り立つことを示す．d_∞ の定義より

$$\begin{aligned} d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) &= \max_{1 \le i \le n} \{|x_i - z_i|\} \\ &= \max_{1 \le i \le n} \{|x_i - y_i + y_i - z_i|\} \\ &\le \max_{1 \le i \le n} \{|x_i - y_i| + |y_i - z_i|\} \quad (\because {}^\forall a, b \in \mathbb{R}, |a + b| \le |a| + |b|) \\ &\le \max_{1 \le i \le n} \{|x_i - y_i|\} + \max_{1 \le i \le n} \{|y_i - z_i|\} \quad (*) \\ &= d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_\infty(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \end{aligned}$$

となって主張が従う．ただし $(*)$ は次のようにして示される．$\{a_1, \dots, a_n\}$ の中で最大のものを a_i，$\{b_1, \dots, b_n\}$ の中で最大のものを b_j，$\{a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n\}$ の中で最大のものを $a_k + b_k$ とおくと，$a_k \le a_i$ かつ $b_k \le b_j$ であるから $a_k + b_k \le a_i + b_j$ である．つまり

$$\max_{1 \le i \le n} \{a_i + b_i\} \le \max_{1 \le i \le n} \{a_i\} + \max_{1 \le i \le n} \{b_i\}$$

が成り立つ．以上より d_∞ は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である．

3. 次のように定められた関数 $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は全て $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数ではない．それぞれの d について反例を挙げよ．ただし，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2),\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ とする．
   (a) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(x_1-y_1)^3+(x_2-y_2)^3$.
   (解答例)
   $\boldsymbol{x}=(1,-1),\boldsymbol{y}=(0,0)$ が反例．実際，
   $$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(1-0)^3+(-1-0)^3=0$$
   となって，$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ と $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ が同値ではない．
   (b) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\min\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$.
   (解答例)
   $\boldsymbol{x}=(0,0),\boldsymbol{y}=(2,1),\boldsymbol{z}=(3,3)$ が反例．実際，
   $$\begin{aligned}d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})&=\min\{|0-3|,|0-3|\}=\min\{3,3\}=3\\ d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})&=\min\{|0-2|,|0-1|\}=\min\{2,1\}=1\\ d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})&=\min\{|2-3|,|1-3|\}=\min\{1,2\}=1\end{aligned}$$
   となって，三角不等式 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\le d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ を満たさない．
4. 以下の問いに答えよ．
   (a) 実数列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ が $\alpha\in\mathbb{R}$ に収束することの ε-N 論法に基づく定義を答えよ．
   (解答例)
   任意の $\varepsilon>0$ に対して　ある $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ が存在して　$N_\varepsilon<n$ ならば $|a_n-\alpha|<\varepsilon$　が成り立つ．
   (b) $a_n=\frac{3}{n^2}$ $(n\ge1)$ で定義される数列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ を考える．$\varepsilon=0.1$ に対して $|a_n|<\varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ．
   (解答例)
   $|a_n|<\varepsilon$，すなわち $\left|\frac{3}{n^2}\right|<0.1$ を式変形することで $n^2>30$ を獲る．したがって求める条件は $n>\sqrt{30}$.
   (※　n は自然数なので，$n>6$ のように答えても良いです．解答は一意に定まりません.)
   (c) (b) で定義した数列 $\{a_n\}_{n\ge1}$ に対して，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ を ε-N 論法に基づき示せ．
   (解答例)
   任意の $\varepsilon>0$ を取る．このとき $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ を $N_\varepsilon>\sqrt{3/\varepsilon}$ を満たすように取ると，$N_\varepsilon<n$ ならば $|a_n-0|<\varepsilon$ が成り立つ．実際，$N_\varepsilon>\sqrt{3/\varepsilon}$ より $N_\varepsilon^2/3>1/\varepsilon$ であることに注意すると，$N_\varepsilon<n$ のとき
   $$\begin{aligned}|a_n-0|&=\frac{3}{n^2}\\ &<\frac{3}{N_\varepsilon^2}\quad(\because N_\varepsilon<n)\\ &<\varepsilon\quad(\because N_\varepsilon^2/3>1/\varepsilon)\end{aligned}$$
   が成り立つ．したがって示された．
5. $(\mathbb{R}^2,d)$ を距離空間とする．ただし，距離関数 d はマンハッタン距離関数
   $$d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mapsto\sum_{i=1}^{2}|x_i-y_i|$$
   とする．このとき $x_n=(3-\frac{1}{n},-2+\frac{4}{n^2})$ $(n\ge1)$ で定まる点列 $\{x_n\}_{n\ge1}$ の極限点は $x=(3,-2)$ であることを示せ．
   (解答例)
   $\lim_{n\to\infty}d(x,x_n)=0$ であることを示せばよい.(参考: 講義第 4 回スライド p.17) 点 x,x_n 間のマンハッタン距離は
   $$d(x,x_n)=\left|3-3+\frac{1}{n}\right|+\left|-2+2-\frac{4}{n^2}\right|=\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}$$
   である．したがって $\lim_{n\to\infty}d(x,x_n)=0$ であるから主張を得る．

6. 以下の問いに答えよ.

(a) 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $x=x_0$ で連続であることの ε-δ 論法に基づく定義を答えよ.

(解答例)

任意の $\varepsilon>0$ に対して ある $\delta_\varepsilon>0$ が存在して $|x-a|<\delta_\varepsilon$ ならば $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ が成り立つ.

(b) 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x^2+1$ を考える. このとき, $\varepsilon=0.1$ に対して

$$|x-3|<\delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-10|<\varepsilon$$

を満たす δ_ε >0 の条件を答えよ.

(解答例)

$|x-3|<\delta_\varepsilon$ のとき

$$\begin{aligned}|f(x)-10| &= \left|x^2-9\right| \\ &= |(x-3)(x+3)| \\ &= |(x-3)((x-3)+6)| \\ &= \left|(x-3)^2+6(x-3)\right| \\ &\le |x-3|^2+6|x-3| \\ &< \delta_\varepsilon^2+6\delta_\varepsilon \\ &= (\delta_\varepsilon+3)^2-9\end{aligned}$$

である. したがって $(\delta_\varepsilon+3)^2-9<0.1$, すなわち $0<\delta_\varepsilon<\sqrt{0.1+9}-3$ が求める条件である.
(※ $\sqrt{0.1+9}-3$ を別の形で表しても良いですし, $0<\delta_\varepsilon<\sqrt{0.1+9}-3$ を満たしてる条件ならば別の解答でも正解です.)

(c) (b) で与えた関数 f が連続写像であることを ε-δ 論法に基づき示せ.

(解答例)

全ての $x_0\in\mathbb{R}$ で f が連続であることを示す.
任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\delta_\varepsilon>0$ を $0<\delta_\varepsilon<\sqrt{\varepsilon+|x_0|^2}-|x_0|$ を満たすように取れば

$$|x-x_0|<\delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

が成り立つ. 実際, そのような δ_ε に対して $|x-x_0|<\delta_\varepsilon$ ならば

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &= \left|(x^2+1)-(x_0^2+1)\right| \\ &= \left|x^2-x_0^2\right| \\ &= \left|(x-x_0)^2+2x_0(x-x_0)\right| \\ &\le |x-x_0|^2+2|x_0|\cdot|x-x_0| \quad (\because \text{三角不等式}) \\ &< \delta_\varepsilon^2+2|x_0|\delta_\varepsilon \quad (\because |x-x_0|<\delta_\varepsilon) \\ &= (\delta_\varepsilon+|x_0|)^2-|x_0|^2 \\ &< \varepsilon \quad \left(\because 0<\delta_\varepsilon<\sqrt{\varepsilon+|x_0|^2}-|x_0|\right)\end{aligned}$$

である. よって示された.