幾何学 2 第 12 回

位相空間の定義

講義のページ

野本 慶一郎

明星大学 教育学部 教育学科

2024 年 12 月 11 日

スライド

今日の数学パズル

注意喚起　数列 $2, 6, 12, 20, 30, 42, \ldots$ の一般項を求めよ.

前回の復習

開集合と閉集合の定義

定義

X を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする.

- A が X の**開集合**であるとは, $x \in X$ が A の境界点ならば $x \notin A$ が成り立つことをいう.
- A が X の**閉集合**であるとは, $x \in X$ が A の境界点ならば $x \in A$ が成り立つことをいう.

定理 (教科書 p.137 定理 10.12)

距離空間の間の写像 $f : X \to Y$ に対して以下は同値.

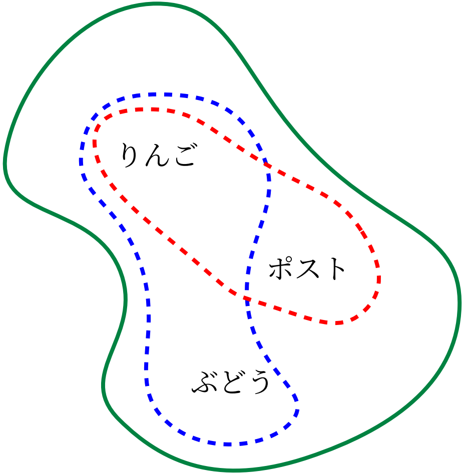
1. f は連続.
2. Y の任意の開集合 O に対して, $f^{-1}(O)$ は X の開集合.
3. Y の任意の閉集合 F に対して, $f^{-1}(F)$ は X の閉集合.

- **特に連続写像とは, 開 (閉) 集合の引き戻しが再び開 (閉) 集合である写像と言える.**

今日の内容

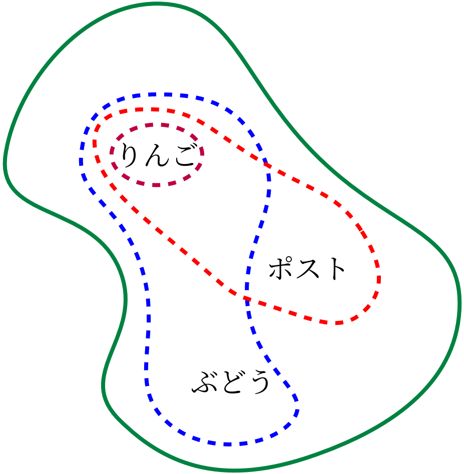
位相空間の導入

- 今日の講義では, 距離空間を一般化した**位相空間**の定義を学びます.
- 位相空間というのは, 距離を定めずに要素同士の近さが定義できるような空間のことです.
- 具体的には, “同じ開集合に属す” 要素同士を近いこととして定義をします.



位相空間の導入

- しかし距離空間で定義した開集合は, **内点・外点・境界点**という距離関数から定まる概念を用いて定義されました.
- では, 距離関数を用いない位相空間ではどのように開集合を定めるか？
- 実は, 第 10 回の講義で証明した "**開集合の基本 3 性質**" を満たす集合たちを新たに開集合と定めます.



位相空間の定義

定義

集合 X の部分集合族 (部分集合の集合) $\mathcal{O}$ が以下の 3 条件を満たすとき,
$\mathcal{O}$ を X の**位相構造**または**位相**という.

1. $X \in \mathcal{O}, \varnothing \in \mathcal{O}$.
2. $\mathcal{O}$ の有限個の要素の共通部分は, $\mathcal{O}$ の要素. $(U_1, ..., U_n \in \mathcal{O} \Longrightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{O})$
3. $\mathcal{O}$ の任意個の要素の和集合は, $\mathcal{O}$ の要素. $(U_\lambda \in \mathcal{O}\,(\lambda \in \Lambda) \Longrightarrow \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O})$

$\mathcal{O}$ の要素を, X の開集合と呼ぶ.
組 $(X, \mathcal{O})$ を**位相空間**と呼ぶ. また, 単に X を位相空間と呼ぶこともある.

- 第 10 回の講義スライド p.13 で証明した定理と見比べてみよう.
- X が距離空間の場合は, $\mathcal{O} =$ (開集合全体) とすることで上記の定義に当てはまっていることが分かる ($\because$第 10 回 p.13 の定義). したがって位相空間が距離空間の一般化になっていることが分かる.

注意

- 位相空間の定義は少し複雑で抽象的であるため, いくつかコメントをしておく.
- まず位相 $\mathcal{O}$ というのは, p.7 で描いたような "グループ分け" の集合である.
  つまり $X = \{$りんご, ポスト, ぶどう$\}$ であれば, 例えば

$$\mathcal{O} = \{\varnothing, \{\text{りんご}\}, \{\text{りんご}, \text{ポスト}\}, \{\text{りんご}, \text{ぶどう}\}, X\}$$

  のような, "X の部分集合の集合" になっている.
- この $\mathcal{O}$ の元 (例えば $\{$りんご, ポスト$\}$ 等.) を**開集合と呼ぶ**. 位相空間では距離関数を考えていないので, もはやこの元が境界を含んでいるかどうかは全く分からないが, 距離空間における開集合の性質を満たす様に定義したので, 強引に**開集合と呼ぶことにする**のである.

位相空間の例

例

集合 $X = \{a, b, c\}$ を考える．このとき

$$\mathcal{O} := \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$$

と定める．このとき $(X, \mathcal{O})$ は位相空間となる．

- 例えば $\{a, b\}, \{a, c\} \in \mathcal{O}$ を取れば確かに

$$\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\} \in \mathcal{O}, \quad \{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\} = X \in \mathcal{O}$$

  となっている．
- 実際に手を動かして，他の要素でも確かめてみましょう．

位相空間の例

例

集合 $X = \{a, b, c\}$ を考える．このとき

$$\mathcal{O} := \{\varnothing, \{a, b\}, \{c\}, X\}$$

と定める．このとき $(X, \mathcal{O})$ は位相空間となる．

- このように, 同じ集合 X でも位相 $\mathcal{O}$ は色々な種類がある場合がある.

密着位相・離散位相

例 (密着位相)

集合 X に対して, $\mathcal{O} := \{\varnothing, X\}$ とおく.
このとき $(X, \mathcal{O})$ は位相空間となる．この位相を**密着位相**と呼ぶ.

- 密着位相は名前の通り, "どの 2 点の距離も 0 である" と見なすような位相である.

例 (離散位相)

集合 X に対して, $\mathcal{O} := \{X\text{の部分集合}\}$ とおく.
このとき $(X, \mathcal{O})$ は位相空間となる．この位相を**離散位相**と呼ぶ.

- 離散位相とは, "異なる 2 点の距離は 1" と見なす位相である (離散距離関数を思い出そう).

閉集合

- 距離空間においては, 距離関数を用いて開集合と閉集合を別々に定義した.
- しかし位相空間では開集合という概念を新たに定義しただけなので,
  このままでは閉集合を定義できない.
- そこで, 距離空間では

$$A : \text{開集合} \Longrightarrow A^c : \text{閉集合}$$
$$A : \text{閉集合} \Longrightarrow A^c : \text{開集合}$$

  という命題が成り立っていた (第 11 回 講義スライド p.8) ことを思い出す.
  位相空間ではこの事実をもって閉集合の定義とするのである.

定義

位相空間 X の部分集合 A が**閉集合**であるとは, その補集合 A^c が開集合であるときをいう.