1. X を距離空間, $A \subset X$ を部分集合, A^c をその補集合 $X \setminus A$ とする.
   (a) A が X の開集合ならば A^c は X の閉集合であることを示せ.
   (b) A が X の閉集合ならば A^c は X の開集合であることを示せ.
   (解答例)
   $x \in X$ を A^c の境界点とすると, x は A の境界点でもあることに注意する．このとき

$$\begin{aligned}
\text{「}A\text{は開集合」} &\iff \text{「}x \in X\text{が}A\text{の境界点ならば}x \notin A\text{」} \\
&\iff \text{「}x \in X\text{が}A^c\text{の境界点ならば}x \notin A\text{」} \\
&\iff \text{「}x \in X\text{が}A^c\text{の境界点ならば}x \in A^c\text{」} \\
&\iff \text{「}A^c\text{は閉集合」}
\end{aligned}$$

   である．以上より示された.

2. 距離空間の間の写像 $f : X \to Y$ について, 以下を示せ.

Y の任意の開集合 O に対して $f^{-1}(O)$ は X の開集合 $\iff$ Y の任意の閉集合 F に対して $f^{-1}(F)$ は X の閉集合.

(解答例)
同様なので「$\Longrightarrow$」のみ示す．任意に閉集合 $F \subset Y$ を取る．このとき逆像の性質から

$$f^{-1}(F^c) = f^{-1}(F)^c$$

が成り立つ．問 1 より F^c は開集合であり, さらに仮定より $f^{-1}(F^c)$ は開集合である．したがって上記の等式より $f^{-1}(F)^c$ も開集合であるから, 再び問 1 より

$$f^{-1}(F) = (f^{-1}(F)^c)^c$$

は閉集合である．以上より示された.