幾何学 2 第 10 回

開集合・閉集合

野本 慶一郎

明星大学 教育学部 教育学科

2024 年 11 月 27 日

講義のページ

スライド

今日の数学パズル

テスト返しのためおやすみ.

前回の復習

前回のまとめ

- 写像 $f : X \to Y$ によって $x_1 \leftrightarrow y_1, x_2 \leftrightarrow y_2$ と 1:1 に対応しているとすれば
$$x_1 \text{ と } x_2 \text{ が近い} \iff y_1 \text{ と } y_2 \text{ が近い}$$
という性質が成り立つとき, (X, d_X) と (Y, d_Y) は同じと見なす.

定義

距離空間 X, Y に対して全単射 $f : X \to Y$ が存在して

1. $f : X \to Y$ は連続
2. $f^{-1} : Y \to X$ は連続

が成り立つとき, f を**同相写像**という. また, X と Y は**同相**であるといい $X \simeq Y$ と書く.

- これまでよく例として挙げてきた以下の距離空間は, 全て同相である.

1. $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d_2), d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$
2. $(\mathbb{R}^n, d_1), d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$
3. $(\mathbb{R}^n, d_\infty), d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$

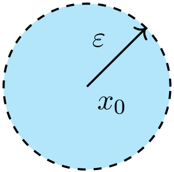
今日の内容

境界の無い図形とは？

- 距離空間 (X, d_X) における連続写像の定義では, ε 近傍

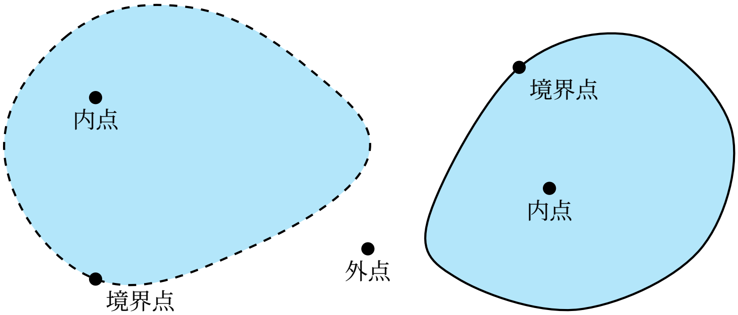
$$U(x_0, \varepsilon) := \{x \in X \mid d_X(x, x_0) < \varepsilon\} \ (x_0 \in X)$$

  を用いて定義をすることができた. (第?回定義?参照.)
- この ε 近傍はどのような距離関数を考えているかで形状は変わってくるが,
  例えば 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^2$ では, いわゆる**境界の無い円**で図示することができた.
- 連続写像の定義からも分かるように, このような境界の無い図形は距離空間や位相空間において重要な役割を果たす.



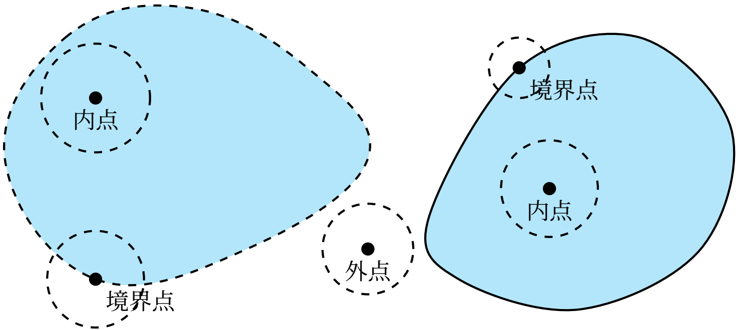
境界の無い図形とは？

- このように, “境界の無い図形” である**開集合**を適切に定義し,
  その性質を見ることが今日の目標である.
- まずは図形における “内側の点” である**内点**, “外側の点” である**外点**,
  “境界上の点” である**境界点**を厳密に定義しよう.



内点・外点・境界点のイメージ

- 内点: その点中心の ε 近傍が領域内に収まるように描ける.
- 外点: その点中心の ε 近傍が領域外に収まるように描ける.
- 境界点: 内点でも外点でもない (どんな ε 近傍を描いても領域内と領域外に交わる).



内点・外点・境界点の定義

定義 (教科書 p.131 定義 10.1)

X を距離空間とする. 任意の部分集合 $A \subset X$ と $x \in X$ に対して次のように定める.

1. ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $U(x, \varepsilon) \subset A$ が成り立つとき, x は A の**内点**であるという.
2. ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $U(x, \varepsilon) \cap A = \varnothing$ が成り立つとき, x は A の**外点**であるという.
3. x が内点でも外点でもないとき, A の**境界点**であるという.

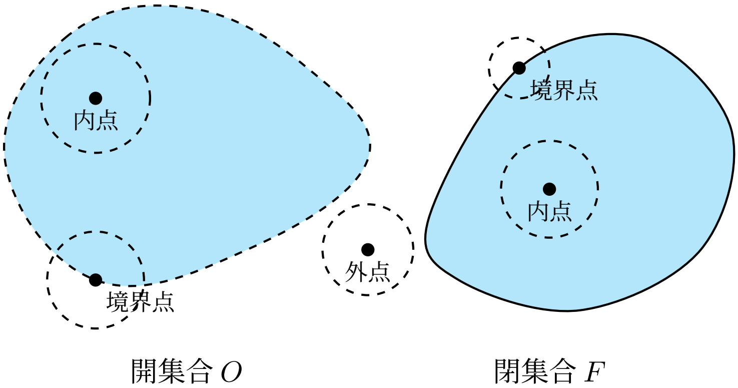
- $x \in X$ が A の境界点であることは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$U(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \varnothing \text{ かつ } U(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$$

が成り立つことと同値である. (A^c は X における A の補集合 $X \setminus A$.)

開集合・閉集合のイメージ

- 開集合 O: 境界点は全て含まない ($x \in X$ が O の境界点ならば $x \notin A$).
- 閉集合 F: 境界点は全て含む ($x \in X$ が F の境界点ならば $x \in F$).



開集合・閉集合の定義

定義

X を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする.

- A が X の**開集合**であるとは, $x \in X$ が A の境界点ならば $x \notin A$ が成り立つことをいう.
- A が X の**閉集合**であるとは, $x \in X$ が A の境界点ならば $x \in A$ が成り立つことをいう.

注意: 開集合や閉集合には同値な定義がいくつもある. 上記の定義も教科書とは異なるが, ここではなるべく直感に沿うような定義を採用した.

- この講義では, 開集合であることの同値な条件を次のページで紹介・証明する.

証明

命題

距離空間 X の部分集合 $A \subset X$ に対して以下は同値.

1. $x \in X$ が A の境界点ならば $x \notin A$ が成り立つ.
2. 任意の点 $x \in A$ が A の内点 (ある $\varepsilon > 0$ が存在して $U(x, \varepsilon) \subset A$).

(証明)

- $[(1) \Rightarrow (2)]$. 任意に $x \in A$ を取る. このとき (1) の対偶を考えることで点 x は A の境界点ではない. よって点 x は A の内点または外点である. このとき明らかに x は A の内点.
- $[(2) \Rightarrow (1)]$. $x \in X$ を A の境界点とする. $x \in A$ だったと仮定する (背理法). このとき (2) より x は A の内点となるが, 境界点の定義は内点でも外点でもない点のことだったので矛盾. よって $x \notin A$. $\square$

つまり開集合 A とは, 全ての点 $x \in A$ において A の中に収まるような ε 近傍が描ける, という性質を満たすものである.

開集合の基本 3 性質

定理 (教科書 p.134-135 定義 10.8)

X を距離空間とするとき, 以下が成り立つ.

1. X と $\varnothing$ は, X の開集合.
2. X の**有限個**の開集合の**共通部分**は, また X の開集合.
   ($U_1, \dots, U_n$; 開集合 $\Rightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n$; 開集合)
3. X の**任意個**の開集合の**和集合**は, また X の開集合.
   (U_λ $(\lambda \in \Lambda)$; 開集合 $\Rightarrow \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$; 開集合)

- 無限個の開集合の共通部分は, 一般に開集合になるとは限らない.
  よく挙げられる反例として

$$U_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N})$$

がある. これは $\cap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\}$ となり (区間縮小法), これは開集合ではない.

証明

- ここでは (1) と (2) のみ示すことにする．(3) は演習問題とする．

((1) の証明)

- X が開集合であることを示す．任意に $x \in X$ を取る．このとき $\varepsilon = 1$ に対して $U(x, \varepsilon) \subset X$ が成り立つ．実際，ε 近傍の定義から $U(x, \varepsilon)$ が X に含まれることは自明．(ε の値は何でもよい)
- $\varnothing$ が開集合であることを示す．示したいことは

$$x \in \varnothing \Rightarrow \text{ある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して } U(x, \varepsilon) \subset \varnothing \text{ が成り立つ}$$

である．しかし仮定が偽なので上記命題は真である．

証明

((2) の証明)

- 「U_1, U_2 が開集合ならば $U_1 \cap U_2$ も開集合」を示せば, 帰納的に主張が得られる.
- U_1, U_2 を X の開集合とする. 示したいのは

$$x \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \text{ある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して } U(x, \varepsilon) \subset U_1 \cap U_2 \text{ が成り立つ}$$

  である. このとき $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ と仮定してよい.
- $x \in U_1 \cap U_2$ とする. このとき $x \in U_1$ かつ $x \in U_2$ であることから
  1. ある $\varepsilon_1 > 0$ が存在して $U(x, \varepsilon_1) \subset U_1$.
  2. ある $\varepsilon_2 > 0$ が存在して $U(x, \varepsilon_2) \subset U_2$

  が成り立つ.

証明

- 以下, $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とおく．このとき
$$U(x, \varepsilon) \subset U_1 \cap U_2$$
であることを示せばよい.
- 任意に $a \in U(x, \varepsilon)$ を取る．このとき $d_X(a, x) < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ であるから, $a \in U(x, \varepsilon_1) \subset U_1$. 同様にして $a \in U_2$ が示される．以上より $a \in U_1 \cap U_2$. □

演習目標: 開集合・閉集合の重要な性質を確認する.