1. X を距離空間とする．U_λ ($\lambda \in \Lambda$) を開集合とする (Λ は添字集合)．このとき

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

が X の開集合であることを示せ．

(解答例)

$\cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \neq \varnothing$ の場合を考えればよい．示したいことは，

$$\text{任意の } x \in \textstyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \text{ に対して，ある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して，} U(x,\varepsilon) \subset \textstyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

である．

任意に $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ を取る．このとき，ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $x \in U_\lambda$ である．今，仮定より U_λ は開集合であるから，ある $\varepsilon > 0$ が存在して $U(x,\varepsilon) \subset U_\lambda$ が成り立つ．このとき

$$U(x,\varepsilon)(\subset U_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

である．以上より示された．

2. X を距離空間とする．任意の点 $x \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$U(x,\varepsilon)$ は X の開集合であることを示せ．

(解答例)

示したいことは

$$\text{任意の } y \in U(x,\varepsilon) \text{ に対して，ある } \delta > 0 \text{ が存在して，} U(y,\delta) \subset U(x,\varepsilon)$$

である．

任意に $y \in U(x,\varepsilon)$ を取る．このとき近傍の定義から，X の距離関数 d_X に対して $d_X(x,y) < \varepsilon$ が成り立つ．ここで，$\delta := \varepsilon - d_X(x,y)(>0)$ とおく．このとき

$$U(y,\delta) \subset U(x,\varepsilon)$$

が成り立つ．実際，任意の $z \in U(y,\delta)$ に対して

$$d_X(x,z) \leq d_X(x,y) + d_X(y,z) < d_X(x,y) + (\varepsilon - d_X(x,y)) = \varepsilon$$

が成り立つので $z \in U(x,\varepsilon)$ である．以上より示された．

3. X を距離空間とする．部分集合 $A(\subset X)$ が閉集合であることと

$$\text{任意の } x \in A^c \text{ に対して, ある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して, } U(x,\varepsilon) \cap A = \varnothing$$

が同値であることを示せ．ただし, $A^c := X \setminus A$ は X における A の補集合である．

(解答例)

$A \subset X$ を閉集合とする．任意に $x \in A^c$ を取る．このとき x は A の境界点または外点である．x が A の境界点だったならば, 閉集合の定義より $x \in A$ となるので矛盾．よって x は A の外点である (ある $\varepsilon > 0$ が存在して $U(x,\varepsilon) \cap A = \varnothing$).

逆を示す．$x \in X$ を A の境界点とする．このとき $x \notin A$ だったと仮定する (すなわち $x \in A^c$). すると仮定より, x は A の外点である．しかし x は A の境界点, 特に A の外点ではないので矛盾．よって $x \in A$. 以上より A は閉集合である．

4. X を距離空間とする．任意の点 $x \in X$ に対して一点集合 $\{x\}$ は X の閉集合であることを示せ．

(解答例)

問 3 より

$$\text{任意の } y \in \{x\}^c \text{ に対して, ある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して, } U(y,\varepsilon) \cap \{x\} = \varnothing$$

を示せばよい．すなわち

$$\text{任意の } y(\neq x) \text{ に対して, ある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して, } U(y,\varepsilon) \cap \{x\} = \varnothing$$

を示せばよい．

X の距離関数を d_X と書く．任意に X の元 $y(\neq x)$ を取ると, $d_X(x,y) > 0$ である．このとき $\varepsilon := d_X(x,y) > 0$ とおくと $U(y,\varepsilon) \cap \{x\} = \varnothing$ が成り立つ．実際, $z \in U(y,\varepsilon) \cap \{x\}$ が取れたとすると $d_X(z,y) < \varepsilon = d_X(x,y)$ かつ $z = x$ でなければならないが, このとき $d_X(z,y) = d_X(z,y)$ となって矛盾．よって示された．