幾何学 2 第 9 回

距離空間の同相写像

野本 慶一郎

明星大学 教育学部 教育学科

2024 年 11 月 20 日

講義のページ

スライド

今日の数学パズル

- 有理数 p, q に対して

$$|p-q|_2 \coloneqq \frac{1}{2^{(p-q\text{が}2\text{で割れる回数})}}$$

と定義すると, 写像 $|\cdot|_2 : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ は距離関数になることが知られている.

- このとき距離空間 $(\mathbb{Q}, |\cdot|_2)$ における無限級数

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots$$

は収束するか？ 収束するのであればどのような値になるか？

前回の復習

連続写像の同値条件

命題 (教科書 p.113-114 定義 9.1)

距離空間の間の写像 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 及び $x_0\in X$ に対して以下は全て同値.

1. f は点 $x_0\in X$ で連続, すなわち

   $$\text{任意の}\,\varepsilon>0\,\text{に対して, ある}\,\delta_\varepsilon>0\,\text{が存在して,}\; d_X(x,x_0)<\delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon.$$

2. 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $\delta_\varepsilon>0$ が存在して, $U(x_0,\delta_\varepsilon)\subset f^{-1}(U(f(x_0),\varepsilon))$.
3. (X,d_X) の任意の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ に対して, $x_n\to x_0 \implies f(x_n)\to f(x_0)$.

今日の内容

二つの距離空間が同じとは？ (1/2)

- 二つの距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) が “同じ” とは何を指すだろうか？
- そもそも, 距離空間という概念を定義したモチベーションは初回の講義でも述べたように 2 点の近さを距離によって判定できる集合を考えたい, ということであった.
- よって仮に写像 $f : X \to Y$ によって $x_1 \leftrightarrow y_1, x_2 \leftrightarrow y_2$ と 1:1 に対応しているとすれば
$$x_1 \text{ と } x_2 \text{ が近い} \Longleftrightarrow y_1 \text{ と } y_2 \text{ が近い}$$
という性質が成り立つとき, (X, d_X) と (Y, d_Y) は同じと見なすことができそうである.

二つの距離空間が同じとは？ (2/2)

- 今述べたことを踏まえて, 距離空間 X と Y が同じであることの定義を考えよう.
- 写像 $f : X \to Y$ によって $x_1 \leftrightarrow y_1, x_2 \leftrightarrow y_2$ と 1:1 に対応する,
  という文言から f は全単射であることが要請される. すなわち $f^{-1} : Y \to X$ が存在する.
- 「x_1 と x_2 が近い $\Longrightarrow$ y_1 と y_2 が近い」という性質を実現するのは
  まさに写像 $f : X \to Y$ が連続であることだった.
- 同様にして「y_1 と y_2 が近い $\Longrightarrow$ x_1 と x_2 が近い」という性質を実現するのは
  逆写像 $f^{-1} : X \to Y$ が連続であることに他ならない.
- よって X と Y が同じであるというのは

  全単射 $f : X \to Y$ が存在して, f も f^{-1} も連続写像

  と定義すれば良さそうである.

同相写像

定義 (教科書 p.118 定義 9.14)

距離空間 X, Y に対して, 写像 $f : X \to Y$ が以下の三条件を満たすとき f を同相写像という.

1. $f : X \to Y$ は全単射
2. $f : X \to Y$ は連続写像
3. $f^{-1} : Y \to X$ は連続写像

定義 (教科書 p.119 定義 9.15)

距離空間 X から距離空間 Y への同相写像が存在するとき,
X と Y は**同相**であるといい, $X \simeq Y$ と表す.

同相写像の例

- これまでよく例として挙げてきた以下の距離空間は, 実は全て同相である.

1. $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d_2), d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$
2. $(\mathbb{R}^n, d_1), d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$
3. $(\mathbb{R}^n, d_\infty), d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$

- ここでは $(\mathbb{R}^n, d_2) \simeq (\mathbb{R}^n, d_1)$ を証明しよう (残りは演習問題).

準備: 三つの距離関数の間の関係

補題 (教科書 p.105 補題 8.10)

任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して, 以下の不等式が成り立つ:

$$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq n d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

(証明)

簡単のため $|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|$ の中で最大のものを $|x_k - y_k|$ とおくと, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}
d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= |x_k - y_k| = \sqrt{(x_k - y_k)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\
d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2} + \cdots + \sqrt{(x_n - y_n)^2} \\
&= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\
d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \leq |x_k - y_k| + \cdots + |x_k - y_k| = n d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

□

ユークリッド空間とマンハッタン空間の同相性 (1/3)

命題

ユークリッド空間 $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d_2)$ 及びマンハッタン空間 $(\mathbb{R}^n, d_1)$ に対して,
$\mathbb{E}^n \simeq (\mathbb{R}^n, d_1)$ が成り立つ. ただし, 距離関数 d_2, d_1 は以下で定義される.

$$d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$
$$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$$

(証明)

全単射写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ として, 恒等写像 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ を選ぶ (このとき $f^{-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ である).
このとき $f : (\mathbb{R}^n, d_2) \to (\mathbb{R}^n, d_1)$, 及び $f^{-1} : (\mathbb{R}^n, d_1) \to (\mathbb{R}^n, d_2)$ が
連続写像であることを示せばよい.

ユークリッド空間とマンハッタン空間の同相性 (2/3)

(証明続き)

$f : (\mathbb{R}^n, d_2) \to (\mathbb{R}^n, d_1)$ の連続性

- f が任意の $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ で連続であることを示す.「第 7 回 p.7 命題」より $\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{x}_0$ となる点列 $\{\boldsymbol{x}_m\}_{m\geq 1}$ に対して, $\lim_{m\to\infty} f(\boldsymbol{x}_m) = f(\boldsymbol{x}_0)$ を示せばよい.
(今は f を恒等写像として取っているので $f(\boldsymbol{x}_m) = \boldsymbol{x}_m, f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$ である.)

注意: $\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{x}_0$ は $(\mathbb{R}^n, d_2)$ における等式, $\lim_{m\to\infty} f(\boldsymbol{x}_m) = f(\boldsymbol{x}_0)$ は $(\mathbb{R}^n, d_1)$ における等式である. 距離の測り方が異なっている.

- さらにそれを示すには「第 4 回 p.17 命題」より

$$\lim_{m\to\infty} d_2(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_0) = 0 \Longrightarrow \lim_{m\to\infty} d_1(f(\boldsymbol{x}_m), f(\boldsymbol{x}_0)) = 0$$

が成り立つことを示せばよい.

ユークリッド空間とマンハッタン空間の同相性 (3/3)

(証明続き)

- ここで, f が恒等写像であることと p.10 の補題より以下が成り立つ:

$$0 \leq d_1(f(\boldsymbol{x}_m), f(\boldsymbol{x}_0)) = d_1(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_0) \leq n d_2(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_0)$$

- よって $\lim_{m\to\infty} d_2(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_0) = 0$ ならば挟みうちの原理より $\lim_{m\to\infty} d_1(f(\boldsymbol{x}_m), f(\boldsymbol{x}_0)) = 0$.

<u>$f^{-1} : (\mathbb{R}^n, d_1) \to (\mathbb{R}^n, d_2)$ の連続性</u>

- f の連続性の場合と同様にして, 距離関数の不等式

$$0 \leq d_2(f^{-1}(\boldsymbol{x}_m), f^{-1}(\boldsymbol{x}_0)) = d_2(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_0) \leq d_1(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_0)$$

  から証明できる (省略). □

演習目標: 同相写像の取り扱いに慣れる