1. 距離空間 $X, Y, Z$ に対して以下が成り立つことを証明せよ.
   (a) $X \simeq X$.　(反射律)
   (b) $X \simeq Y$ ならば $Y \simeq X$.　(対称律)
   (c) $X \simeq Y$ かつ $Y \simeq Z$ ならば $X \simeq Z$.　(推移律)

2. 距離空間 $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d_2), (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ が同相であることを示せ. ただし $d_2$ はユークリッド距離関数, $d_\infty$ は以下で定義される $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である.

$$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{1 \le i \le n} \{|x_i - y_i|\}, \quad (\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n))$$

3. $\mathbb{R}$ 上のユークリッド距離 $d_2$ に対して, $(\mathbb{Q}, d_2)$ は距離空間となる. すなわち $x, y \in \mathbb{Q}$ の間の距離を

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x - y|$$

と定めると, $d_2 : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ 上の距離空間となる. 全く同様にして $(\mathbb{Z}, d_2)$ も距離空間となるが, 以下の誘導に沿って $(\mathbb{Q}, d_2)$ と $(\mathbb{Z}, d_2)$ が同相でないことを示せ.

   (a) 任意に $x_0 \in \mathbb{Q}$ を取り固定する. このとき点列 $\{x_n\}_{n \ge 1}$ で

$$\lim_{n \to \infty} d_2(x_n, x_0) = 0 \text{ かつ } {}^\forall n \in \mathbb{N}, x_n \ne x_0$$

   を満たすものを一つ答えよ.

   (b) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ を単射とする. このとき (a) で構成した $\mathbb{Q}$ における点列 $\{x_n\}_{n \ge 1}$ に対して

$$d_2(f(x_n), f(x_0)) \ge 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

   であることを示せ.

   (c) 同相写像 $f : (\mathbb{Q}, d_2) \to (\mathbb{Z}, d_2)$ が存在すると仮定し矛盾を導け.