1. 距離空間 X, Y, Z に対して以下が成り立つことを証明せよ．
   (a) $X \simeq X$．　(反射律)
   (解答例)
   $f : X \to X$ を恒等写像とする ($f(x) = x$)．明らかに f は全単射であり，$f^{-1}(x) = x$ である．
   f 及び f^{-1} は明らかに連続であるため，f は同相写像である．
   (b) $X \simeq Y$ ならば $Y \simeq X$．　(対称律)
   (解答例)
   $f : X \to Y$ を同相写像と仮定する．このとき逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ が存在しており，f も f^{-1} も連続写像である．これは f^{-1} が同相写像であることに他ならない (f^{-1} が全単射であり，f^{-1} 及び $(f^{-1})^{-1} = f$ が連続写像)．したがって $Y \simeq X$．
   (c) $X \simeq Y$ かつ $Y \simeq Z$ ならば $X \simeq Z$．　(推移律)
   (解答例)
   $f : X \to Y, g : Y \to Z$ を同相写像と仮定する．このとき逆写像 $f^{-1} : Y \to X, g^{-1} : Z \to Y$ が存在しており，f, f^{-1}, g, g^{-1} は全て連続写像である．
   $g \circ f : X \to Z$ が同相写像であることを示す．$g \circ f$ の逆写像は $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ であるから，$g \circ f$ 及び $f^{-1} \circ g^{-1}$ が連続であることを示せばよいが，それは第 7 回講義スライド p.12 の命題より従う．よって $X \simeq Z$．

2. 距離空間 $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d_2), (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ が同相であることを示せ．ただし d_2 はユークリッド距離関数，d_∞ は以下で定義される $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である．

$$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{1 \le i \le n} \{|x_i - y_i|\}, \quad (\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n))$$

(解答例)
全単射写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ として，恒等写像 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ を選ぶ (このとき $f^{-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ である)．このとき，$f : (\mathbb{R}^n, d_2) \to (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ 及び $f^{-1} : (\mathbb{R}^n, d_\infty) \to (\mathbb{R}^n, d_2)$ が連続写像であることを示せばよい．同様なので $f : (\mathbb{R}^n, d_2) \to (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ の連続性のみ示す．
f が任意の $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ で連続であることを示す．第 7 回講義スライド p.7 の命題より

$$\lim_{m \to \infty} \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{x}_0 \text{ となる } (\mathbb{R}^n, d_2) \text{ の点列 } \{\boldsymbol{x}_m\}_{m \ge 1} \text{ に対して，} \lim_{m \to \infty} f(\boldsymbol{x}_m) = f(\boldsymbol{x}_0)$$

を示せばよい．特に第 4 回講義スライド p.17 の命題より

$$\lim_{m \to \infty} d_2(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_0) = 0 \Longrightarrow \lim_{m \to \infty} d_\infty(f(\boldsymbol{x}_m), f(\boldsymbol{x}_0)) = 0$$

を示せばよい．f が恒等写像であることと，第 9 回講義スライド p.10 の補題より

$$0 \le d_\infty(f(\boldsymbol{x}_m), f(\boldsymbol{x}_0)) = d_\infty(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_0) \le d_2(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_0)$$

が成り立つ．したがってはさみうちの原理より，$\lim_{m \to \infty} d_2(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_0) = 0$ ならば $\lim_{m \to \infty} d_\infty(f(\boldsymbol{x}_m), f(\boldsymbol{x}_0)) = 0$.

3. $\mathbb{R}$ 上のユークリッド距離 d_2 に対して, $(\mathbb{Q}, d_2)$ は距離空間となる．すなわち $x, y \in \mathbb{Q}$ の間の距離を

$$d_2(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$$

と定めると, $d_2 : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ 上の距離空間となる．全く同様にして $(\mathbb{Z}, d_2)$ も距離空間となるが, 以下の誘導に沿って $(\mathbb{Q}, d_2)$ と $(\mathbb{Z}, d_2)$ が同相でないことを示せ．

(a) 任意に $x_0 \in \mathbb{Q}$ を取り固定する．このとき点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ で

$$\lim_{n\to\infty} d_2(x_n, x_0) = 0 \text{ かつ } {}^{\forall}n \in \mathbb{N}, x_n \neq x_0$$

を満たすものを一つ答えよ．

(解答例)

$\mathbb{Q}$ における点列 $\{x_n\}$ を

$$x_n = x_0 + \frac{1}{n} \ (n \geq 1)$$

と定めれば, $d_2(x_n, x_0) = \frac{1}{n} \to 0$ であり, $x_n \neq x_0$ (${}^{\forall}n \in \mathbb{N}$) である．

(b) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ を単射とする．このとき (a) で構成した $\mathbb{Q}$ における点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ に対して

$$d_2(f(x_n), f(x_0)) \geq 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であることを示せ．

(解答例)

(a) で定めた点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ について, $x_n \neq x_0$ であること及び f が単射であることから, $f(x_n) \neq f(x_0)$ である．また, f の値域は $\mathbb{Z}$ であるから $f(x_n)$ と $f(x_0)$ は異なる二つの整数となる．したがって $d_2(f(x_n), f(x_0)) = |f(x_n) - f(x_0)|$ は 1 以上の値でなければならない．

(c) 同相写像 $f : (\mathbb{Q}, d_2) \to (\mathbb{Z}, d_2)$ が存在すると仮定し矛盾を導け．

(解答例)

同相写像 $f : (\mathbb{Q}, d_2) \to (\mathbb{Z}, d_2)$ が存在すると仮定する．特に $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ は単射である．また, f は連続写像でもあるから

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ となる } \mathbb{Q} \text{ の任意の点列 } \{x_n\}_{n\geq 1} \text{ に対して, } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

が成り立つ．すなわち

$$\lim_{n\to\infty} d_2(x_n, x_0) = 0 \text{ となる } \mathbb{Q} \text{ の任意の点列 } \{x_n\}_{n\geq 1} \text{ に対して, } \lim_{n\to\infty} d_2(f(x_n), f(x_0)) = 0$$

が成り立つ．しかし問 (a), (b) で構成したように

$$\lim_{n\to\infty} d_2(x_n, x_0) = 0 \text{ かつ } \lim_{n\to\infty} d_2(f(x_n), f(x_0)) \neq 0$$

となる点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ が存在するので矛盾．したがって $(\mathbb{Q}, d_2)$ と $(\mathbb{Z}, d_2)$ は同相でない．