幾何学 2 第 7 回

連続写像の条件・性質

野本 慶一郎

明星大学 教育学部 教育学科

2024 年 10 月 30 日

講義のページ

スライド

今日の数学パズル

- 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ に虚数単位 i を加えた集合

$$\mathbb{Z}[i] \coloneqq \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

  を考える．この集合を**ガウス整数環**と呼ぶ.

- 2025 を $\mathbb{Z}[i]$ において素因数分解 (素元分解) せよ.
- また, 素数 $p \in \mathbb{Z}$ が $\mathbb{Z}[i]$ において分解されるための必要十分条件は何か.

前回の復習

ε 近傍を用いた連続写像の定義

定義

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする．**写像 $f : X \to Y$ が点 $x_0 \in X$ で連続**であるとは，以下を満たすことをいう．

任意の $\varepsilon > 0$ に対して ある $\delta_\varepsilon > 0$ が存在して $d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon$ ならば $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

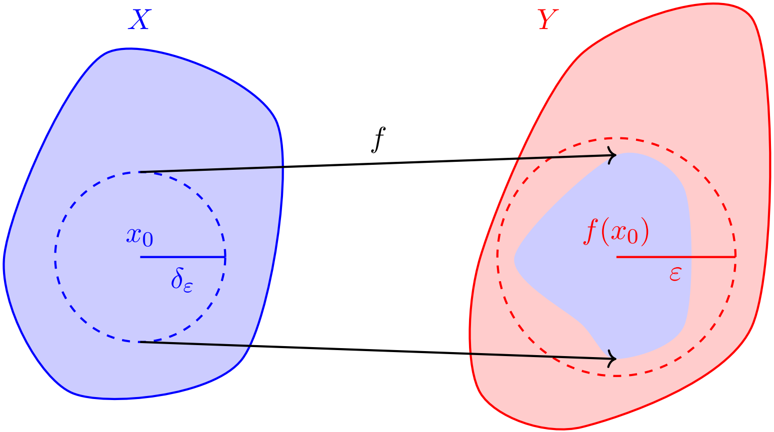
特に**全ての $x_0 \in X$ で連続のとき，f は連続写像**であるという．

- もちろん

  「$d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon$」$\to$「$x \in U(x_0, \delta_\varepsilon)$」,「$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$」$\to$「$f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$」

  と置き換えてもよい．

距離空間における連続写像のイメージ図



今日の内容

今日の目標

- 今日の目標は, 距離空間の間の写像が連続写像となるための同値な条件を知ること.

命題 (教科書 p.113-114 定義 9.1)

距離空間の間の写像 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 及び $x_0\in X$ に対して以下は全て同値.

1. f は点 $x_0\in X$ で連続, すなわち

   任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $\delta_\varepsilon>0$ が存在して, $d_X(x,x_0)<\delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$.

2. 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $\delta_\varepsilon>0$ が存在して, $U(x_0,\delta_\varepsilon)\subset f^{-1}(U(f(x_0),\varepsilon))$.
3. (X,d_X) の任意の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ に対して, $x_n\to x_0 \implies f(x_n)\to f(x_0)$.

- 示すもの: $(1)\Rightarrow(2)$, $(2)\Rightarrow(1)$, $(1)\Rightarrow(3)$, $(3)\Rightarrow(2)$

証明：(1) $\Longrightarrow$ (2)

(証明) **任意に $\varepsilon > 0$ を取る.** このとき仮定より

$$\textbf{ある } \delta_\varepsilon > 0 \textbf{ が存在して } d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

が成り立つ. 示すべきことはこの δ_ε に対して, $U(x_0, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$ が成り立つことである. そのために, 任意に $x \in U(x_0, \delta_\varepsilon)$ を取る. すると

$$\begin{aligned} x \in U(x_0, \delta_\varepsilon) &\iff d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon \quad (\because \text{近傍の定義}) \\ &\Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon (\because \text{仮定}) \\ &\iff f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon) \quad (\because \text{近傍の定義}) \\ &\iff x \in f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon)) \quad (\because \text{逆像の定義}) \end{aligned}$$

が成り立つ. よって $x \in f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$, すなわち $U(x_0, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$ となる. □

証明：$(2) \Longrightarrow (1)$

(証明) **任意に $\varepsilon > 0$ を取る.** このとき仮定より

$$\textbf{ある } \delta_\varepsilon > 0 \textbf{ が存在して } U(x_0, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$$

が成り立つ. 示すべきことはこの δ_ε に対して, $d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ が成り立つことである. そのために $d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon$ と仮定すると

$$\begin{aligned}
d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon &\iff x \in U(x_0, \delta_\varepsilon) \quad (\because \text{近傍の定義}) \\
&\Longrightarrow x \in f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon)) \quad (\because \text{仮定}) \\
&\iff f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon) \quad (\because \text{逆像の定義}) \\
&\iff d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad (\because \text{近傍の定義})
\end{aligned}$$

が成り立つ. すなわち $d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ が成り立つ. □

証明：$(1) \Longrightarrow (3)$

(証明) (X, d_X) **の任意の点列** $\{x_n\}_{n\geq 1}$ **が** $x_n \to x_0$ **を満たすとする．** また，**任意に** $\varepsilon > 0$ **を取る．** このとき仮定 (1) より

$$\textbf{ある } \delta_\varepsilon > 0 \textbf{ が存在して}, \ d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

が成り立つ．さらに $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ であるから，点列の収束の定義からこの $\delta_\varepsilon > 0$ に対して

$$\text{ある } N_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N} \text{ が存在して}, \ N_{\delta_\varepsilon} < n \Longrightarrow d_X(x_n, x_0) < \delta_\varepsilon$$

が成り立つ．したがって

$$N_\varepsilon < n \ (\Longrightarrow d_X(x_n, x_0) < \delta_\varepsilon) \Longrightarrow d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$$

となる．よって $f(x_n) \to f(x_0)$ が示された． □

証明：$(3) \Longrightarrow (2)$

(証明) 少し複雑なので，ここでは省略する．気になる人は以下から証明を読んでみてください．(HP でも公開しています.)

補足 pdf (証明)

連続写像の性質

命題 (教科書 p.116 命題 9.6)

距離空間 X, Y, Z と写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ に対し,
f と g が共に連続ならば, 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ は連続である.

(proof) $g \circ f : X \to Z$ が全ての点 $x_0 \in X$ で連続であることを「連続写像の同値条件 (3)」を用いて示す.
X 内の任意の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ で $x_n \to x_0$ となるものを考える. このとき, f は連続なので $f(x_n) \to f(x_0)$ が成り立つ. さらに $g : Y \to Z$ が連続であることから $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$, すなわち

$$(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$$

が成り立つ. よって合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も連続である. $\square$

連続写像の例

例

関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=x^2, g(x)=x+1$ で定める.
f,g は連続関数であるから, 合成関数 $(g\circ f)(x)=(x+1)^2$ も連続関数である.
同様にして $(f\circ g)(x)=x^2+1$ も連続関数である.

- 一般に, 多項式の形をした

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \quad (a_i\in\mathbb{R})$$

は連続写像 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を定める. 証明には関数の和及び積の連続性を用いる.
しかし, 一般の距離空間では和や積といった概念が定義されているとは限らないので注意.