1. A, B を集合, $U \subset B$ を部分集合とする．また, $f : A \to B$ を写像とする．このとき $f^{-1}(U)$ の定義を答えよ．
(解答例)
$$f^{-1}(U) \coloneqq \{x \in A \mid f(x) \in U\}.$$

2. A, B を集合, $b \in B$ とする．また, $f : A \to B$ を写像とする．このとき $f^{-1}(b)$ の定義を答えよ．
(解答例)
$$f^{-1}(b) \coloneqq \{x \in A \mid f(x) = b\}.$$

3. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする．写像 $f : X \to Y$ が点 $x_0 \in X$ で連続であることと
$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して, ある } \delta_\varepsilon > 0 \text{ が存在して, } U(x_0, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$$
が成り立つことは同値であることを示せ．
(解答例)
$f : X \to Y$ が点 x_0 で連続であると仮定する．任意に $\varepsilon > 0$ を取ると, 仮定より
$$\text{ある } \delta_\varepsilon > 0 \text{ が存在して, } d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$
が成り立つ．このとき $U(x_0, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$ が成り立つ．実際,
$$\begin{aligned} x \in U(x_0, \delta_\varepsilon) &\Longleftrightarrow d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon \quad (\because \text{近傍の定義}) \\ &\Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad (\because \text{仮定}) \\ &\Longrightarrow f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon) \quad (\because \text{近傍の定義}) \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon)) \quad (\because \text{逆像の定義}) \end{aligned}$$
である．
次に, $x_0 \in X$ に対して
$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して, ある } \delta_\varepsilon > 0 \text{ が存在して, } U(x_0, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon))$$
が成り立つと仮定する．このとき
$$\begin{aligned} d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon &\Longleftrightarrow x \in U(x_0, \delta_\varepsilon) \quad (\because \text{近傍の定義}) \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(U(f(x_0), \varepsilon)) \quad (\because \text{仮定}) \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon) \quad (\because \text{逆像の定義}) \\ &\Longleftrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad (\because \text{近傍の定義}) \end{aligned}$$
が成り立つ．以上より示された．

4. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする．写像 $f : X \to Y$ が連続写像ならば

$$(X, d_X) \text{ の任意の点列 } \{x_n\}_{n\geq 1} \text{ に対して, } \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ならば } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

が成り立つことを示せ．(実は逆も成り立つ．次回講義内で証明します.)

(解答例)

任意に $x_0 \in X$ を取り，(X, d_X) の任意の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ が $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ を満たすとする．また，任意に $\varepsilon > 0$ を取る．このとき仮定より

$$\text{ある } \delta_\varepsilon > 0 \text{ が存在して, } d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

が成り立つ．さらに $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ であるから，点列の収束の定義より

$$\text{ある } N_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N} \text{ が存在して, } N_{\delta_\varepsilon} < n \Longrightarrow d_X(x_n, x_0) < \delta_\varepsilon$$

が成り立つ．以上より

$$N_{\delta_\varepsilon} < n \, (\Longrightarrow d_X(x_n, x_0) < \delta_\varepsilon) \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

を得る．これは $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ であることに他ならない．