1. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(a) $\varepsilon = 3$ に対して

$$|x - 1| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon$$

を満たす $\delta_\varepsilon > 0$ の条件を答えよ.

(解答例)

$|x - 1| < \delta_\varepsilon$ のとき

$$|f(x) - f(1)| = |3x - 3| = 3|x - 1| < 3\delta_\varepsilon$$

である. したがって $3\delta_\varepsilon < 3$, すなわち $0 < \delta_\varepsilon < 1$ が求める条件である.

(b) 実数 $\varepsilon (> 0)$ に対して

$$|x - 1| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon$$

を満たす $\delta_\varepsilon > 0$ の条件を答えよ.

(解答例)

$|x - 1| < \delta_\varepsilon$ のとき

$$|f(x) - f(1)| = |3x - 3| = 3|x - 1| < 3\delta$$

である. したがって $3\delta_\varepsilon < \varepsilon$, すなわち $0 < \delta_\varepsilon < \varepsilon/3$ が求める条件である.

(c) 関数 f は $x = 1$ で連続であることを ε-δ 論法に基づき示せ.

(解答例)

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta_\varepsilon > 0$ を $0 < \delta_\varepsilon < \varepsilon/3$ を満たすように取れば

$$|x - 1| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon$$

が成り立つ. 実際, そのような δ_ε に対して $|x - 1| < \delta_\varepsilon$ ならば

$$|f(x) - f(1)| = |3x - 3| = 3|x - 1| < 3\delta_\varepsilon < \varepsilon$$

である. よって示された.

(d) 関数 f は連続 (すなわち全ての点 $x_0 \in \mathbb{R}$ で連続) であることを ε-δ 論法に基づき示せ.

(解答例)

全ての点 $x_0 \in \mathbb{R}$ で f が連続であることを示す.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta_\varepsilon > 0$ を $0 < \delta_\varepsilon < \varepsilon/3$ を満たすように取れば

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

が成り立つ. 実際, そのような δ_ε に対して $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ならば

$$|f(x) - f(x_0)| = |3x - 3x_0| = 3|x - x_0| < 3\delta_\varepsilon < \varepsilon$$

である. よって示された.

2. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ は連続であることを ε-δ 論法に基づき示せ.

(解答例)

全ての点 $x_0 \in \mathbb{R}$ で f が連続であることを示す.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta_\varepsilon > 0$ を $0 < \delta_\varepsilon < \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2} - |x_0|$ を満たすように取れば

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

が成り立つ. 実際, そのような δ_ε に対して $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ならば

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= \left|x^2 - x_0^2\right| \\
&= |(x - x_0)(x + x_0)| \\
&= |(x - x_0)((x - x_0) + 2x_0)| \\
&= \left|(x - x_0)^2 + 2x_0(x - x_0)\right| \\
&\leq |x - x_0|^2 + 2|x_0| \cdot |x - x_0| \quad (\because \text{三角不等式}) \\
&< \delta_\varepsilon^2 + 2|x_0|\delta_\varepsilon \quad (\because |x - x_0| < \delta_\varepsilon) \\
&= (\delta_\varepsilon + |x_0|)^2 - |x_0|^2 \\
&< \varepsilon \quad (\because \delta_\varepsilon < \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2} - |x_0|)
\end{aligned}$$

である. よって示された.