明星大学 MEISEI UNIVERSITY

幾何学 2 第 4 回

距離空間の性質 (点列の収束)

講義のページ

野本 慶一郎

明星大学 教育学部 教育学科

2024 年 10 月 09 日

スライド

今日の数学パズル

- 1のみを並べた整数をレピュニット (Repunit) 数という:

$$1111111\cdots111$$

- このようなレピュニット数の中には, 1009 の倍数のものが存在することを証明せよ.

前回の復習

距離空間

定義 (教科書 p.104 定義 8.6/8.7)

X を集合とする．写像 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が次の性質を満たすとき，
d は X 上の**距離関数**であるという．

1. $d(x, y) \geq 0$．さらに $d(x, y) = 0 \iff x = y$．
2. $d(x, y) = d(y, x)$．
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$． **(三角不等式)**

また，このとき (X, d) を**距離空間**と呼ぶ (単に X を距離空間という場合もある)．

- ユークリッド距離空間 $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d)$ は距離空間である．
- 以下で定義されるマンハッタン距離も $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である．

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

今日の内容

距離空間の点列

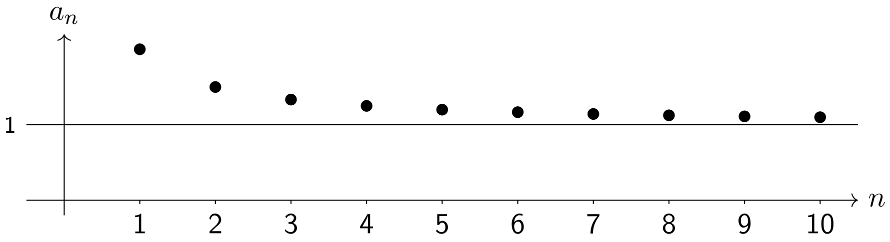
- 距離空間 (X, d) とは 2 点の "近さ" が考えられる空間であるため点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ の収束性を扱うことができる.
- しかし $x_n \in X$ は実数とは限らないため, その極限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ をどのように考えればよいのかという問題に直面する.
- 例えば $X = \mathbb{R}^2$ に対して, 点列 $x_n = (1/n, 1/n^2)$ の極限はどのように定義すればよいか？ さらに距離関数 d を変えたら収束性や極限点は変化するのか？
- 今日はこのような問題に答えるために, まずは実数列の収束性を深掘りする.

実数列の収束性再考

- 高校では, 実数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するというのは

  n を**限りなく大きく**すると　a_n は α に**限りなく近づく**

  と説明された.
- しかしこの定義だと,「限りなく」という曖昧な言葉が含まれてしまい, 収束するかしないかが個人によって変わってしまう恐れがある.
- 例えば「数列 $a_n = 1 + 1/n$ は単調減少であるため 0 に限りなく近づく」と主張する人が現れてもおかしくない. しかし実際は 1 に収束する.



「a_n は α に限りなく近い」の言い換え

- では a_n が α に限りなく近いというとき，どれくらい近ければよいのだろうか？
  つまり a_n と α の間の距離 $|a_n - \alpha|$ はいくつ未満であればよいのだろうか？
- 前ページでも述べたように，「限りなく」というのは主観に依る．
  例えば $|a_n - \alpha| < 0.1$ や $|a_n - \alpha| < 0.01$ なら大抵の場合は近いと思うかもしれない．
  極端な話だが，$|a_n - \alpha| < 10000$ でも近いと思う人はいるかもしれない:
- しかし**限りなく**近づくというのは，**誰から見ても**近い必要がある．
  つまり具体的ないくつかの基準 (上記の例で言えば 0.1, 0.01, 10000 等) に限らず，
  どのような正の値 ε に対しても $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ である必要がある:

$$「a_n \text{ は } \alpha \text{ に限りなく近い」} = 「\textbf{任意の } \varepsilon > 0 \textbf{ に対して } |a_n - \alpha| < \varepsilon」$$

「n を限りなく大きくすると」の言い換え

- したがって,「**n を限りなく大きくすると a_n は α に限りなく近づく**」というのは

  任意の $\varepsilon > 0$ に対して n を限りなく大きくすれば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ とできる

  と言い換えることができる.

- では n はどれくらい大きくすればよいのだろうか？
  例えば $n > 1000$ や $n > 10000$ なら大抵の場合は大きいと思うかもしれない.
  極端な話, $n > 5$ 程度でも十分大きいと思う人はいるかもしれない.

- しかし一番気にするべきは「**a_n と α の間の距離は ε 未満にできるか？**」
  すなわち「**不等式 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つかどうか？**」なので
  この**不等式が成り立つ程度に n が大きければ十分**である.
  (例えば $n > 5$ で $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立てば $n > 10000$ とかにする必要は全くない.)

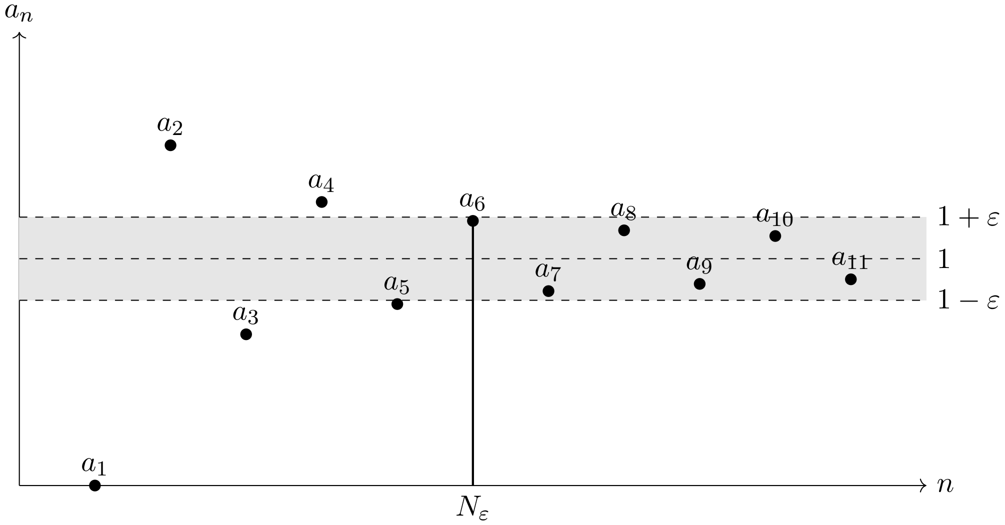
「n を限りなく大きくすると」の言い換え

- つまり, $\varepsilon > 0$ によって変化 (依存) する境界 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ **が取れて (大きさは関係ない),** **境界 N_ε を超えた全ての n に対して** $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立てばよい.
- 結局,「n **を限りなく大きくすると** a_n **は** α **に限りなく近づく**」というのは

  「**任意の** $\varepsilon > 0$ **に対して** **ある** $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ **が存在して** $N_\varepsilon < n$ **ならば** $|a_n - \alpha| < \varepsilon$.」

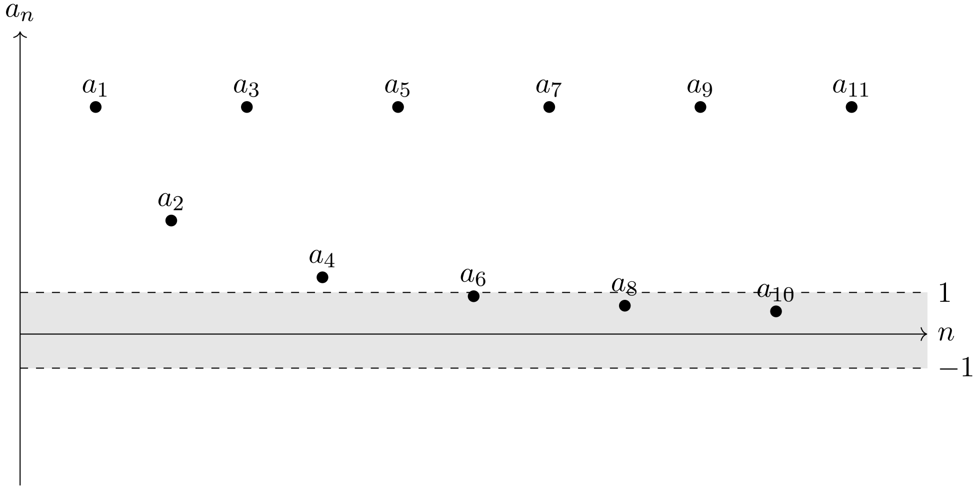
  と言い換えができる. これが $\varepsilon - N$ 論法と呼ばれる収束の定義である.

収束する数列イメージ



a_n
a_2
a_4
a_6
a_8
a_{10}
$1+\varepsilon$
1
a_{11}
a_9
a_7
a_5
$1-\varepsilon$
a_3
a_1
n
N_ε

収束しない数列イメージ



実数列の収束

定義 ($\varepsilon - N$ 論法)

実数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ が実数 α に収束するとは

$$\text{任意の}\ \varepsilon > 0\ \text{に対して　ある}\ N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \text{が存在して}\ \ N_\varepsilon < n\ \text{ならば}\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう.

- 噛み砕いて述べれば

  どのような近さの基準 $\varepsilon > 0$ を取っても
  「ある N_ε を超えた n に対しては a_n と α の距離が ε 未満になる」
  を満たす境界 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が取れる

  となる.
- よって, 実際に収束性を確かめるときにはまず任意に $\varepsilon > 0$ を取るところから始まる. そして「条件を満たす $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ はこのように取れる」と主張及び実証し, 議論が終了する.

例

例

数列 $a_n = 1/n^2$ $(n \geq 1)$ は 0 に収束する．

- まず $\varepsilon = 0.1$ と具体的に取ってみよう．このとき $N_\varepsilon = 3$ とすれば，$N_\varepsilon < n$ となる n に対して，すなわち $n \geq 4$ ならば

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{16} < 0.1 = \varepsilon$$

  が成り立つ．よってこのとき，$n \geq 4$ に対して $|a_n - 0| < \varepsilon$ が成り立つ．

- 次に $\varepsilon = 0.01$ と具体的に取ってみよう．このとき $N_\varepsilon = 10$ とすれば，$N_\varepsilon < n$ となる n に対して，すなわち $n \geq 11$ ならば

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{121} < 0.01 = \varepsilon$$

  が成り立つ．よってこのとき，$n \geq 11$ に対して $|a_n - 0| < \varepsilon$ が成り立つ．

例 (続き)

- 次は $\varepsilon > 0$ を任意に取る．このとき $N_\varepsilon < n$ ならば
$$|a_n - 0| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$
が成り立つような $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ を探したい.
- $N_\varepsilon < n$ ならば $1/n^2 < 1/N_\varepsilon^2$ となるので, $1/N_\varepsilon^2 < \varepsilon$ となる N_ε が取れれば
$$|a_n - 0| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{N_\varepsilon^2} < \varepsilon$$
となって目的が果たされる.
- そしてそのような N_ε は, $1/N_\varepsilon^2 < \varepsilon$ を式変形することにより
$$N_\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$
となる N_ε を取ればよい.

点列の収束

- 距離空間における点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ の収束は，実数列の場合とほとんど同じように定義される．
- つまり n を十分大きくすれば，x_n と極限点 α との距離 $d(x_n, \alpha)$ が十分小さくなることとして定義される．

定義 (教科書 p.108 定義 8.17)

距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ が点 $x \in X$ に**収束する**とは

$$\text{任意の}\ \varepsilon > 0\ \text{に対して　ある}\ N_\varepsilon\ \text{が存在して}\ \ N_\varepsilon < n\ \text{ならば}\ d(x, x_n) < \varepsilon$$

が成り立つことをいう．このとき x を $\{x_n\}_{n\geq 1}$ の極限点と呼び

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{または} \quad x_n \to x \quad (n \to \infty)$$

と表す．

点列の収束の言い換え

- ここまでは, 距離空間の点列の定義を述べただけであり, 具体的に収束性を判定する方法までは述べていない.
- 以下の命題は, 距離空間の点列の収束性を調べることと, 距離列 (実数列) の収束性を調べることと等価であることを主張している!

命題 (教科書 p.109 補題 8.20)

距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ が点 $x \in X$ に収束するためには, 実数列 $\{d(x, x_n)\}_{n\geq 1}$ が 0 に収束することが必要十分である. すなわち

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0.$$

- 証明は

$$d(x, x_n) < \varepsilon \iff |d(x, x_n) - 0| < \varepsilon$$

であることから明らかであるため省略する.

点列の収束例

例

$(\mathbb{R}^2, d)$ を距離空間とする．ただし，距離関数 $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|$ はマンハッタン距離とする．このとき点列 $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad (n \geq 1)$ の極限点は $x = (0, 0)$ である．

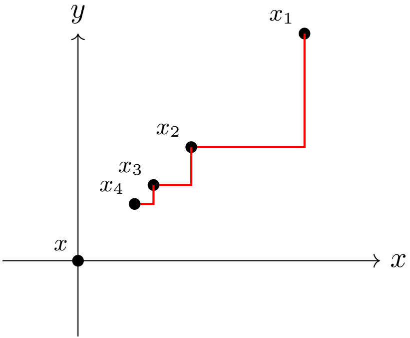
x と x_n の間のマンハッタン距離は

$$d(x, x_n) = \left|0 - \frac{1}{n}\right| + \left|0 - \frac{1}{n}\right| = \frac{2}{n}$$

である．したがって

$$\lim_{n \to \infty} d(x, x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} = 0$$

であるから $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ を得る． $\square$



演習目標: 収束性の厳密な定義を理解する