1. 数列 $a_n = 1/2n \ (n \geq 1)$ に対して, 以下の問いに答えよ.
   (a) $\varepsilon = 0.1$ に対して $|a_n| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ.

   (b) $\varepsilon = 0.01$ に対して $|a_n| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ.

   (c) 実数 $\varepsilon (> 0)$ に対して $|a_n| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ.

   (d) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を $\varepsilon - N$ 論法に基づいて示せ.

2. 数列 $a_n = 1 - 1/n^2 \ (n \geq 1)$ に対して, 以下の問いに答えよ.
   (a) $\varepsilon = 0.1$ に対して $|a_n - 1| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ.

   (b) $\varepsilon = 0.01$ に対して $|a_n - 1| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ.

   (c) 実数 $\varepsilon (> 0)$ に対して $|a_n - 1| < \varepsilon$ を満たす n の条件を答えよ.

   (d) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ を $\varepsilon - N$ 論法に基づいて示せ.

3. 漸化式 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2}$ で定まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ に対して, 以下の問いに答えよ.
   (a) 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は収束すると仮定する. このとき極限値 $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ を, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ であることを利用して求めよ.

   (b) $|a_n - 1| = \frac{1}{2}|a_{n-1} - 1| \ (n \geq 2)$ を証明せよ.

   (c) $|a_n - 1| = \frac{1}{2^n} \ (n \geq 1)$ を証明せよ.

   (d) $\varepsilon - N$ 論法に基づいて, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であることを証明せよ.

4. $(\mathbb{R}^2, d)$ を距離空間とする. ただし, 距離関数 d はマンハッタン距離関数

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|$$

   とする. このとき点列 $x_n = (1/n, 1 + 1/n^2) \ (n \geq 1)$ の極限点は $x = (0, 1)$ であることを示せ.