幾何学 2 第 3 回

距離空間の定義 (定義と距離関数の様々な例)

野本 慶一郎

明星大学 教育学部 教育学科

2024 年 10 月 02 日

講義のページ

スライド

今日の数学パズル

- 10 段の階段を

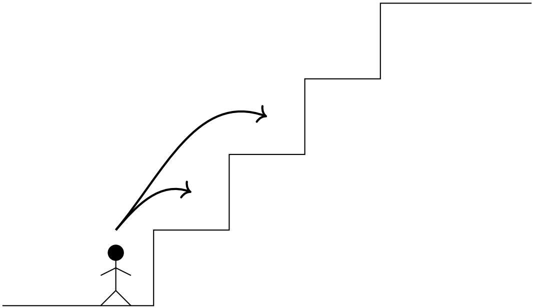
  ① 一段登る，　② 一段飛ばしで登る

  のいずれかを繰り返して登り切る方法は何通りか.

- 例えば右図の 4 段の場合は

$$
\begin{aligned}
4 &= 1+1+1+1, \\
&= 1+1+2, \\
&= 1+2+1, \\
&= 2+1+1, \\
&= 2+2
\end{aligned}
$$

という 5 通りの方法がある.



4 段の場合の図

前回の復習

ユークリッド距離の基本 3 性質

定理 (教科書 p.103 定理 8.5)

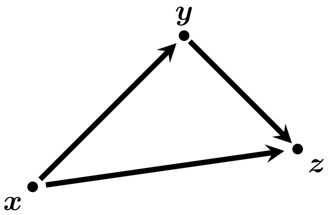
$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ をユークリッド距離関数とする．このとき任意の 3 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{E}^n$ に対して，以下の 3 つの性質が成り立つ．

1. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$．さらに $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.
2. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.
3. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$. (三角不等式)

- 三角不等式は

  遠回りすると距離が増える

  というごく自然な現象を数式で表現したものである．



今日の内容

距離空間に入る前に

- 第 1 回では, 集合 $\mathbb{R}^n$ にはユークリッド距離という長さを測る関数があることを学び, 第 2 回では, ユークリッド距離は以下の自然な三性質を満たすことを証明した.

  1. ユークリッド距離は 0 以上の値を取る.
  さらに 2 点間のユークリッド距離が 0 であることと 2 点が等しいことは同値.

  2. 点 $\boldsymbol{x}$ から点 $\boldsymbol{y}$ へのユークリッド距離と, 点 $\boldsymbol{y}$ から点 $\boldsymbol{x}$ へのユークリッド距離は等しい.

  3. 遠回りをすればユークリッド距離は増える.

- これらの性質を一般化したものが**距離空間**である.
  つまり, **ある集合 X に上記三性質を満たすような距離 d があるとき X を距離空間と呼ぶ**.

距離空間

定義 (教科書 p.104 定義 8.6/8.7)

X を集合とする. 写像 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が次の性質を満たすとき,
d は X 上の**距離関数**であるという.

1. $d(x, y) \geq 0$. さらに $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. **(三角不等式)**

また, このとき (X, d) を**距離空間**と呼ぶ (単に X を距離空間という場合もある).

- $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ をユークリッド距離関数とすれば,
  ユークリッド距離空間 $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d)$ は距離空間である.

  (むしろそうなるように距離空間を定義した.)

距離空間の例 1

命題

2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対してマンハッタン距離関数
$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

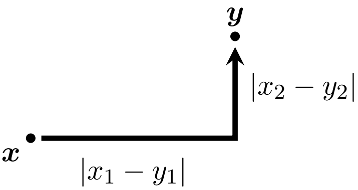
$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \, (= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|)$$

と定義する．このとき $(\mathbb{R}^n, d)$ は距離空間となる．

- つまりマンハッタン距離は

  上下左右にしか進めない
  (斜め移動禁止)

  という距離である．



マンハッタン距離 d に対して $(\mathbb{R}^n, d)$ が距離空間となることの証明

- $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$ であることは, マンハッタン距離関数の定義から

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \geq 0.$$

となって従う. さらに上式より

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \iff \text{任意の}\, i \,\text{に対して}\, x_i = y_i \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$$

が成り立つ.

- 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $|a - b| = |b - a|$ であるから

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$$

マンハッタン距離 d に対して $(\mathbb{R}^n, d)$ が距離空間となることの証明

- 三角不等式 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を示す.
  任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $|a+b| \leq |a| + |b|$ が成り立つから

$$
\begin{aligned}
d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| \quad (\because \text{定義}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} |(x_i - y_i) + (y_i - z_i)| \quad (\because -y_i + y_i \text{ を挟む}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \quad (\because |a+b| \leq |a| + |b|) \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| \quad (\because \text{和の分解}) \\
&= d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \quad (\because \text{定義})
\end{aligned}
$$

となって三角不等式が成り立つ. □

距離空間の例 2

- $\mathbb{R}^n$ だけではなく, 特定の関数からなる集合も距離空間となることがある.

命題

区間 $I = [0,1]$ 上の実数値連続関数全体の集合を $C(I)$ で表すとき, $d : C(I) \times C(I) \to \mathbb{R}$ を

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$$

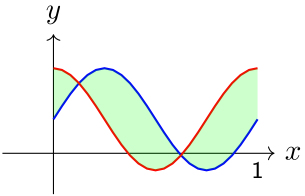
と定める. このとき d は $C(I)$ 上の距離関数である ($(C(I),d)$ は距離空間である).

- 直感的には, 区間 I において

  f と g が近い

  $\iff$ $f(x)$ と $g(x)$ の間の面積が小さい.

- これが距離関数となることは演習問題で取り組みます.



距離空間でない例 1

例

関数 $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$d(x, y) = \left| x^2 - y^2 \right|$$

と定める．このとき d は $\mathbb{R}$ 上の距離関数でない．

- 実際, $d(1, -1) = 0$ より距離関数の定義 1 を満たしていない．
- よって上記の関数 d に対する $(\mathbb{R}, d)$ は距離空間でない．

距離空間でない例 2

例

関数 $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \quad (\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2))$$

と定める．このとき d は $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数でない．

- 実際, 例えば $\boldsymbol{x} = (0, 0), \boldsymbol{y} = (1, 0), \boldsymbol{z} = (2, 1)$ とおくと

  $$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = 5, d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1, d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 2$$

  なので三角不等式 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を満たしていない．
- よって上記の関数 d に対する $(\mathbb{R}^2, d)$ は距離空間でない．

コラム: どうして距離空間はそのように定義されるのか？

- 距離空間は 2 点の “近さ” を, 距離を用いて調べることのできる空間である.
- したがって距離空間では, 数列がある値に限りなく “近づく” といった「数列 (点列) の収束」を扱うことができる.
- 数列の収束に関して有用な性質には, 例えば次のようなものがある.

命題

実数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}, \{b_n\}_{n\geq 1}$ に対して $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$.
2. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$.

(差や商に関しても同様の性質が成り立つ.)

- 高校数学では上記命題の厳密な証明は行わない.
次ページで証明の雰囲気を少し紹介してみよう.

コラム: どうして距離空間はそのように定義されるのか？

- 一つめの性質 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$ は次のように証明される.
- 実数列 $\{a_n+b_n\}_{n\geq 1}$ と $\alpha+\beta$ が限りなく近づくことを示せばよい. その二つの差に関して

  $$0 \leq |(a_n+b_n)-(\alpha+\beta)| = |(a_n-\alpha)+(b_n-\beta)| \leq |a_n-\alpha|+|b_n-\beta| \qquad (\textbf{三角不等式!})$$

  が成り立つ. したがって a_n と α の差, b_n と β の差は (n を大きくすれば) 十分 0 に近づくので, 確かに a_n+b_n と $\alpha+\beta$ の差も十分 0 に近づく. □
- 二つ目の性質 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$ に関しても

  $$|a_nb_n-\alpha\beta| = |a_nb_n-\alpha b_n+\alpha b_n-\alpha\beta| \leq |a_n-\alpha||b_n|+|\alpha||b_n-\beta|$$

  という不等式が成り立つので, ここから証明できる.

コラム: どうして距離空間はそのように定義されるのか？

- このような実数列の極限の基本的性質を導くためには, 距離の定義として三角不等式が必要不可欠である.
- 他にも収束性に関する重要な性質

  実数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ に対して「$\{a_n\}$ が収束列 $\iff$ $\{a_n\}$ がコーシー列」

  を示す際も, 三角不等式を用いて証明する.
- 結局, 数列 (点列) の収束性に関して良い性質を導くためには三角不等式が欠かせないというわけである.

演習目標: 距離空間の様々な例を知る