Cauchy–Shwartz の不等式の証明

野本 慶一郎

2024/09/25

定理: Cauchy–Shwartz の不等式

任意の実数 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ に対して

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \tag{1}$$

が成り立つ.

Proof. 二次方程式

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2 = 0 \tag{2}$$

を考える. 左辺は 0 以上の実数であるから実数解は高々一つである. したがって式 (2) の判別式 D は $D \leq 0$ を満たす. D を計算するために式 (2) の左辺を展開すると

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 x^2 - 2a_i b_i x + b_i^2) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\end{aligned}$$

よって判別式 D は

$$D = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

と計算される. したがって $D \leq 0$ であるから不等式 (1) を得る. □