1. $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ をユークリッド距離関数とする．このとき任意の 3 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n), \boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{E}^n$ に対して, 以下の 3 つの性質が成り立つことを示せ．(つまり講義スライドで行った証明を, 一般の n の場合で行なってください.) ただし, 以下の Cauchy–Shwartz の不等式

$$\text{任意の } a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R} \text{ に対して } \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$$

を用いてもよい.
   (a) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$. さらに $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.
   (b) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.
   (c) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.　(三角不等式)

2. $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^2 |x_i - y_i| \ (= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|)$$

と定める．このとき d_1 が以下の三性質を満たすことを示せ.
   (a) $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$. さらに $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.
   (b) $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.
   (c) $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.　(三角不等式)

3. $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$d_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}) \\ 0 & (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}) \end{cases}$$

と定める．このとき d_0 が以下の三性質を満たすことを示せ.
   (a) $d_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$. さらに $d_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.
   (b) $d_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.
   (c) $d_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_0(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.　(三角不等式)