1. $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ をユークリッド距離関数とする．このとき任意の 3 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n), \boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{E}^n$ に対して, 以下の 3 つの性質が成り立つことを示せ．(つまり講義スライドで行った証明を, 一般の n の場合で行なってください.) ただし, 以下の Cauchy–Shwartz の不等式

$$\text{任意の } a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R} \text{ に対して } \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$$

を用いてもよい．

(a) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$. さらに $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

(解答例)

ユークリッド距離の定義より

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \geq 0 \tag{1}$$

である．また, 式 (1) の等号が成り立つのは全ての i $(1 \leq i \leq n)$ について $x_i = y_i$ のときに限る．つまり $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ であることと $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ であることは同値である．

(b) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

(解答例)

任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $(a-b)^2 = (b-a)^2$ であることより

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$$

(c) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$. (三角不等式)

(解答例)

示したい不等式は

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2} \tag{2}$$

である．簡単のため $a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i$ とおくと, $x_i - z_i = a_i + b_i$ であるから不等式 (2) より

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \tag{3}$$

を示せばよい．特に不等式 (3) の両辺の値は非負であるから, 両辺を 2 乗した

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}\right)^2 \tag{4}$$

を示せばよい．不等式 (4) を示す．不等式 (4) の (右辺) − (左辺) は

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) - (\text{左辺}) &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)} + \sum_{i=1}^n b_i^2 - \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)} + \sum_{i=1}^n b_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2\sum_{i=1}^n a_i b_i - \sum_{i=1}^n b_i^2
\end{aligned}$$

$$= 2\left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)} - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \tag{5}$$

と計算できる．したがって，Cauchy–Shwartz の不等式と式 (5) より不等式 (4) の (右辺) − (左辺) は 0 以上，すなわち

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2$$

が成り立つ．以上より示された．

2. $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{2}|x_i - y_i| \ (= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|)$$

と定める．このとき d_1 が以下の三性質を満たすことを示せ．

(a) $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$． さらに $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

(解答例)

d_1 の定義より

$$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq 0 \tag{6}$$

である．また，式 (6) の等号が成り立つのは $x_1 = y_1$ かつ $x_2 = y_2$ のときに限る．つまり $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ であることと $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ であることは同値である．

(b) $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

(解答例)

任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $|a - b| = |b - a|$ であることより

$$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = d_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$$

(c) $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$． (三角不等式)

(解答例)

示したい不等式は

$$|x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| \tag{7}$$

である．不等式 (7) を示す．任意の実数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $|a + b| \leq |a| + |b|$ が成り立つことより

$$\begin{aligned} |x_1 - z_1| &= |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| \\ &\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| \qquad (8) \\ |x_2 - z_2| &= |x_2 - y_2 + y_2 - z_2| \\ &\leq |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| \qquad (9) \end{aligned}$$

を得る．したがって不等式 (8), (9) を足し合わせることで不等式 (7) を得る．

3. $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$d_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}) \\ 0 & (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}) \end{cases}$$

と定める．このとき d_0 が以下の三性質を満たすことを示せ．

(a) $d_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geq 0$. さらに $d_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.
(解答例)
d_0 の定義より明らか.

(b) $d_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = d_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$.
(解答例)
d_0 の定義より明らか.

(c) $d_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \leq d_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + d_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$. (三角不等式)
(解答例)
$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$ のときと $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{z}$ のときの場合に分けて証明する.
$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$ のときを考える. 示すべき不等式は

$$0 \leq d_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + d_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

であるが, これは明らかに成り立つ.
$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{z}$ のときを考える. このとき $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$ が成り立つことに注意する. 示すべき不等式は

$$1 \leq d_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + d_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \tag{10}$$

である. ここで, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$ であるから $d_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + d_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ は 1 以上の値を取る. したがって不等式 (10) が成り立つ.
以上より

$$d_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \leq d_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + d_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

が示された.