幾何学 2 第 1 回

位相空間論の概要、ユークリッド平面

野本 慶一郎
明星大学 教育学部 教育学科

2024 年 9 月 11 日

講義のページ

本スライド

簡単な自己紹介

- 名前: 野本 慶一郎
  生年月日: 1995 年 9 月 8 日 (29 歳)
- 愛知教育大学 教育学部 中等教育教員養成課程 数学専攻 修了
  九州大学大学院 数理学府 修士課程・博士課程 修了
- 現在は企業で暗号アルゴリズムの研究開発をしています.
- 好きなもの: ビール, ルービックキューブ, マンガ・アニメ, 東海オンエア,
  Acid Black Cherry, UNISON SQUARE GARDEN, YOASOBI, 結束バンド...

今日の数学クイズ

- 3 つの正方形のチョコレートがあります. 3 つとも, 厚さは同じです. 大きな 1 つか, 小さな 2 つがもらえます.

どっちをもらうのが　得でしょうか？

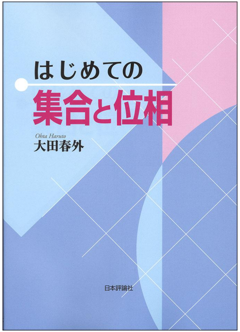
講義について

授業の進め方について

- 基本的に対面で授業を行います.
- 授業構成は以下の通りとします.

  数学クイズ 15 分　＋　講義 (スライド) 45 分　＋　演習 30 分

- 教科書：大田春外,「はじめての集合と位相」, 日本評論社.



成績評価について

- 成績は**レポートと確認テスト (2 回)** を評価して行います.
- **レポートや確認テストは実施前に告知します.**
- 成績の内訳：

  レポート 20 点　＋　(前半) 確認試験 40 点　＋　(後半) 確認試験 40 点

  合計 60 点以上で単位が出ます.

質問について

- 講義内容等について質問がある場合,
  明星 LMS の**個別指導 (コレクション)** を活用してください.
- もしくは私のメールアドレスに連絡をください.

`keiichiro.nomoto`(明星大学のドメイン)

休講のお知らせ (重要)

- **来週 9/18(水) の講義はお休みにします.**
  したがって次回の講義は 9/25(水) となります.
- 後日, 明星 LMS にて正式な休講のお知らせを記載しますので,
  必ず目を通しておいてください.

幾何学 2 で学ぶこと

幾何学 2 で取り扱う内容

- 本講義では, **位相空間**の基礎の習得を目標とします.
- 位相空間とは簡単に言えば

  二つの要素の"近さ・遠さ"を考えることのできる集合

  のことです (物理で扱うような, 波の位相とは異なる概念です).

例 1-1: 原点に近いのは点 P か？ 点 Q か？

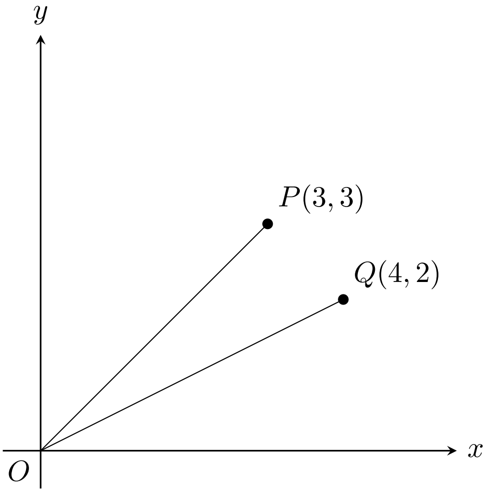
- 直線 OP の長さは

$$\overline{OP} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

直線 OQ の長さは

$$\overline{OQ} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

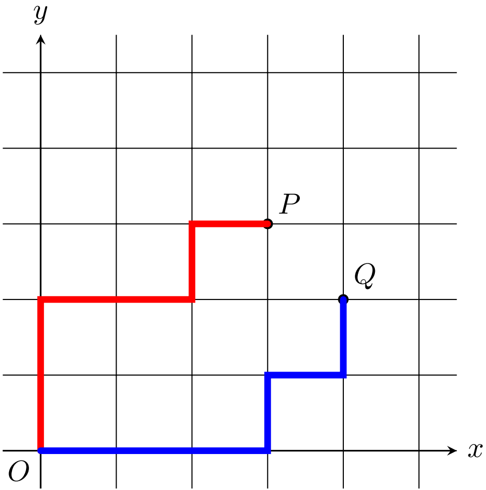
- よって原点により近いのは点 P.



例 1-2: 原点に近いのは点 P か？ 点 Q か？

- 点 P までの距離は 6.
  点 Q までの距離も 6.
- よって同じ近さであると言える？

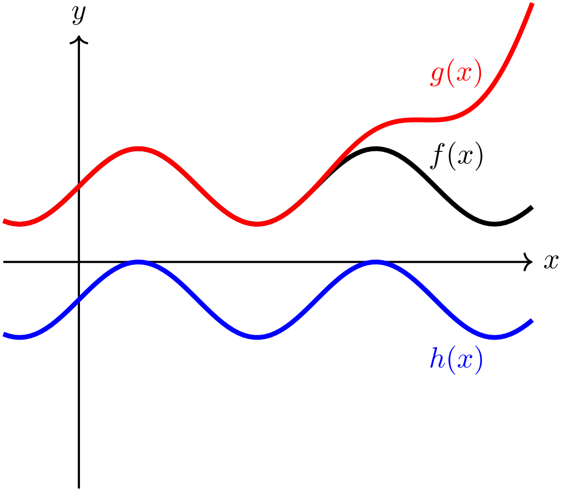
同じ集合でも色々な “近さ” の概念が考えられそう.



例 2: 関数 f に近いのは g か？ h か？

- g の方が一致してる部分が多いから, g の方が近い？
- h の方が形が同じだから, h の方が近い？

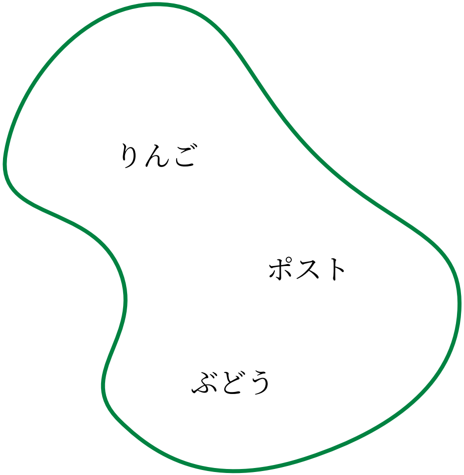
点以外の対象に対しても “近さ” を考えられそう.



例 3: りんごに近いのはぶどう？ ポスト？

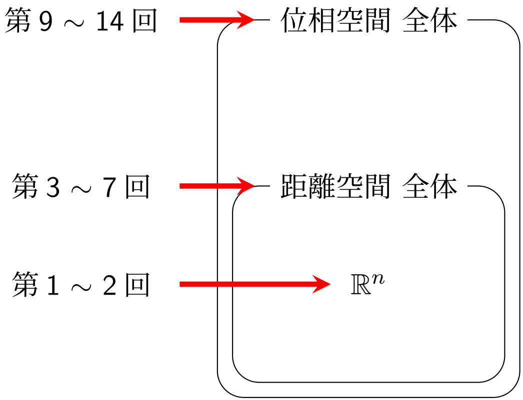
- 「果物」というグループで考えれば ぶどうの方が近い？
- 「色」というグループで考えれば ポストの方が近い？

"距離" を用いなくても "近さ" を考えられそう.



位相空間へのルートマップ

- 位相空間を学べば，これらの “近さ” を統一的に扱えるようになります．
- しかし，“近さ” を考えるのに一番素直なのは “距離” を測ることです．
- “距離” を測ることのできる集合を距離空間といいます．
  もちろん距離空間は位相空間です．
- この講義の序盤は，皆さんがよく知っている $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ の距離を調べます．



身に付くこと

- **数列の収束性, 関数の連続性をより広い視点から捉えられる:**
  - 数列の収束性は, 数列の極限値への "近づき具合" の話.
  - 関数の連続性は, x 座標の "近づき具合" に対する y 座標の "近づき具合" の話.
- **抽象的な議論への慣れ:**
  - 位相 (距離) 空間は, 微積や線形代数と大きく様相が異なり, **抽象度が高い**概念です.
  - 演習問題も「積分を計算せよ」や「行列式を計算せよ」といった具体的なものではなく,「—の定義を答えよ」や「—の証明をせよ」といったものが多くなります.

この講義では教科書よりも例や図を多く取り入れ, 皆さんの理解を全力でサポートします.

抽象化の必要性

- 既に知っているもの ($\mathbb{R}^2$ 等) をわざわざ距離空間や位相空間として抽象化する意味とは？ と思う人もいるもしれません.
- その意味はいくつもありますが, 教員という立場から幾つか挙げてみます.
  1. 複雑な概念に対して重要なポイントを見抜く力を養う
  2. 幅広い視点を持ち, 生徒ごとに合わせたサポートを可能とする
  3. 他分野との繋がりを理解するのに役立つ
  4. 受験問題への対策
- もう皆さんは抽象化によって恩恵が得られることを体感しているはずです. (文字式, 二次方程式, 数列, 微分積分, 行列, . . .)

復習

集合と要素

■ 集合とは「もの」の集まりのこと．もの a が集合に属すことを

$$a \in A \qquad \text{または} \qquad A \ni a$$

と書く (a は集合 A の要素であるという).

例 (外延的記法: 要素を全て列挙)

- $\{-0.4, \sqrt{2}, 3+2i, \pi\}$
- $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- $\{\{-1, 1\}, \{a, b, c, d\}, \{f, g, h\}\}$

例 (内包的記法: 条件で要素を指定)

- $\{x \mid x^3 - x = 0\} \qquad (= \{-1, 0, 1\})$
- $\{n^2 \mid n \in \{1, 3, 5\}\} \qquad (= \{1^2, 3^2, 5^2\} = \{1, 9, 25\})$

集合の包含関係

定義

集合 X と集合 Y に対して

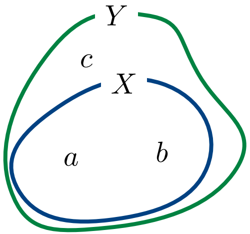
$$\text{任意の } x \in X \text{ に対して, } x \in Y$$

が成り立つとき $X \subset Y$ と表す.

■ 集合 X と集合 Y が等しい $(X = Y)$ というのは

$$X \subset Y \quad \text{かつ} \quad Y \subset X$$

ということ.



$$X = \{a, b\},\ Y = \{a, b, c\}$$

代表的な集合

- 数学においてよく用いられる集合には記号が用意されている.

$\mathbb{N}$: 自然数のなす集合	(**N**atural number (英))
$\mathbb{Z}$: 整数のなす集合	(**Z**halen (独))
$\mathbb{Q}$: 有理数のなす集合	(**Q**uotient (英))
$\mathbb{R}$: 実数のなす集合	(**R**eal number (英))
$\mathbb{C}$: 複素数のなす集合	(**C**omplex number (英))

- これらの集合の間の包含関係は次の通り.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

集合の直積

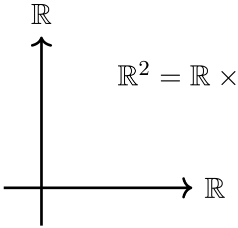
定義 (直積集合)

集合 X, Y に対して, (x, y) $(x \in X, y \in Y)$ という組全体の集合を $X \times Y$ と書き,
集合 X, Y の直積集合と呼ぶ.

$$X \times Y = \{(x, y) \,|\, x \in X, y \in Y\}$$

- 集合 A に対して $A^2 := A \times A$ と書く.
  より一般に以下のように書く.

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\text{個}}$$



写像

定義 (写像)

X, Y を集合とする．f が X から Y への写像であるとは

$$x \in X \text{ に対して } f(x) \in Y \text{ を対応付ける規則 } \text{“}x \mapsto f(x)\text{”}$$

が定まっていること．$f : X \to Y$ と書く．

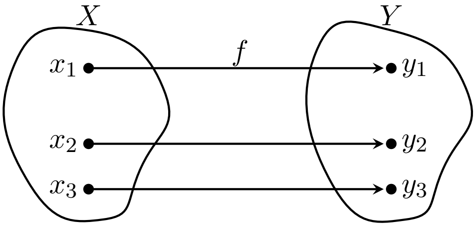
例

- 実数を二乗する関数 f:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

- 二つの実数間の距離を返す関数 g:

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto |x - y|$$



ユークリッド空間

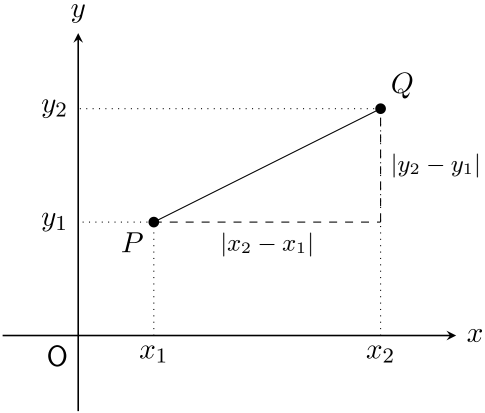
xy 平面

■ xy 平面上の 2 点

$$P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2)$$

の距離 $\overline{PQ}$ は, 三平方の定理を用いることで次のように計算できる.

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



xyz 空間

- 3 次元空間の 2 点 $P = (x_1, y_1, z_1), Q = (x_2, y_2, z_2)$ について, 2 点間の長さ $\overline{PQ}$ は次のようにして計算できた.

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- これらの長さを n 次元に拡張する.
- n 次元空間の点 $P \in \mathbb{R}^n$ の座標を明示的に表すときに, $P = (x_1, y_1, z_1, w_1, \ldots)$ と書いてしまうとアルファベットの文字数が足りない等の不都合があるので, これ以降は

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, x_n)$$

のように書く.

ユークリッド距離

定義 (教科書 p.101 定義 8.1)

$\mathbb{R}^n$ の任意の 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に対して

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \quad \left(= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\right)$$

を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 間の**ユークリッド距離**という.

ユークリッド距離の例 1

例 ($\mathbb{R}^1$)

$x = 2, y = 5$ に対するユークリッド距離は次のように計算される:

$$d(x, y) = \sqrt{(2-5)^2} = |2-5| = 3.$$

例 ($\mathbb{R}^2$)

$\boldsymbol{x} = (-1, 2), \boldsymbol{y} = (3, -5)$ に対するユークリッド距離は次のように計算される:

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-(-5))^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}.$$

ユークリッド距離の例 2

例 ($\mathbb{R}^5$)

$\boldsymbol{x} = (1, 0, -2, -3, 5), \boldsymbol{y} = (-1, 2, 0, -7, 3)$ 間のユークリッド距離は次のように計算される:

$$
\begin{aligned}
d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \sqrt{(1-(-1))^2 + (0-2)^2 + (-2-0)^2 + (-3-(-7))^2 + (5-3)^2} \\
&= \sqrt{4+4+4+16+4} \\
&= \sqrt{32} \\
&= 4\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

ユークリッド空間

- ユークリッド距離 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は, $\mathbb{R}^n$ の 2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して距離という実数を対応させる関数として見ることができる:

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

この写像 d を**ユークリッド距離関数**という.

定義 (教科書 p.102 定義 8.3)

$\mathbb{R}^n$ とユークリッド距離関数 d の組 $(\mathbb{R}^n, d)$ を n 次元ユークリッド空間といい, $\mathbb{E}^n$ で表す.

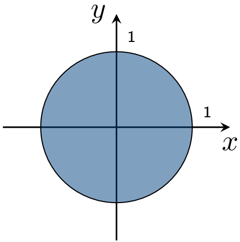
$$\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d)$$

次回以降で, ユークリッド距離ではない "距離" を考えます.
ユークリッド距離関数 d とそうでない距離関数 d' を区別するための記号が $(\mathbb{R}^n, d)$ です.

ユークリッド距離を用いた図形表現

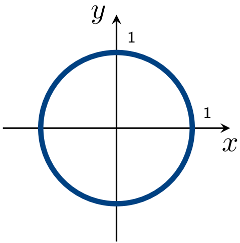
■ 半径 1 の円板 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ は
原点からのユークリッド距離が 1 以下である点の集まり
なので以下のように表せる.

$$D : \left\{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \,\middle|\, d((x, y), (0, 0)) \leq 1\right\}$$



■ 同様にして半径 1 の円 $C : x^2 + y^2 = 1$ は
原点からのユークリッド距離が 1 である点の集まり
なので以下のように表せる.

$$C : \left\{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \,\middle|\, d((x, y), (0, 0)) = 1\right\}$$



代表的なユークリッド空間の部分集合

例 (教科書 p.102 例 8.4)

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^n$ の部分集合

$$B^n := \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\right\},$$
$$S^{n-1} := \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}^n \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\right\}$$

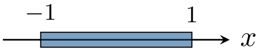
をそれぞれ, n 次元閉球体, $n-1$ 次元球面という.

■ ユークリッド距離を用いて次のように表すこともできる.

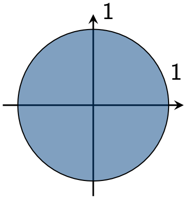
$$B^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}^n \mid d(\mathbf{0}, \boldsymbol{x}) \leq 1\}, \quad S^{n-1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}^n \mid d(\mathbf{0}, \boldsymbol{x}) = 1\}$$

ただし, $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ である.

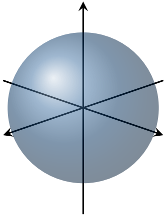
n 次元閉球体, $n-1$ 次元球面の例



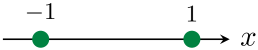
1 次元閉球体



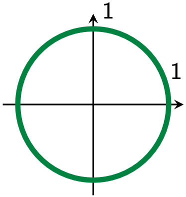
2 次元閉球体



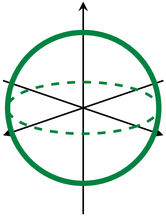
3 次元閉球体



0 次元球面



1 次元閉球面



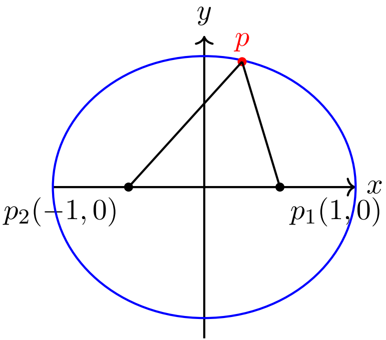
2 次元閉球面

ユークリッド距離を用いた様々な図形

■ $p_1 = (1, 0), p_2 = (-1, 0) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$E = \left\{ p \in \mathbb{E}^2 \,\middle|\, d(p_1, p) + d(p_2, p) = 4 \right\}$$

は右図のような楕円である.



演習目標: ユークリッド距離の取り扱いに慣れる