1. 2 点 $P = (-1, 2), Q = (3, -5)$ 間のユークリッド距離を計算せよ．
   (解答例)

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= \sqrt{(-1-3)^2 + (2-(-5))^2} \\ &= \sqrt{16+49} \\ &= \sqrt{65}. \end{aligned}$$

2. $\mathbb{E}^4$ における以下の 2 点 P, Q 間のユークリッド距離を計算せよ．
   (a) $P = (3, 0, -2, 1), Q = (2, 3, -4, 5)$
   (解答例)

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= \sqrt{(3-2)^2 + (0-3)^2 + (-2-(-4))^2 + (1-5)^2} \\ &= \sqrt{1+9+4+16} \\ &= \sqrt{30}. \end{aligned}$$

   (b) $P = (0, -4, 6, 3), Q = (-1, 4, 3, -2)$
   (解答例)

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= \sqrt{(0-(-1))^2 + (-4-4)^2 + (6-3)^2 + (3-(-2))^2} \\ &= \sqrt{1+64+9+25} \\ &= \sqrt{99} \\ &= 3\sqrt{11}. \end{aligned}$$

3. $\mathbb{E}^n$ の 3 点 $P = (2, 0, 6, x, -1), Q = (-2, 1, 7, -4, 3), R = (5, 2, 0, -3, 1)$ について，P は Q, R から等距離な位置にある．このとき，x の値を求めよ．
   (解答例)
   ユークリッド距離関数 $d : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ は非負の実数値を取ることから，$d(P,Q) = d(P,R)$ であることと $d(P,Q)^2 = d(P,R)^2$ であることは同値である．ここで，$d(P,Q)^2, d(P,R)^2$ を計算すると

$$d(P,Q)^2 = x^2 + 8x + 50, \quad d(P,R)^2 = x^2 + 6x + 62$$

   となる．したがって $d(P,Q)^2 = d(P,R)^2$，すなわち

$$x^2 + 8x + 50 = x^2 + 6x + 62$$

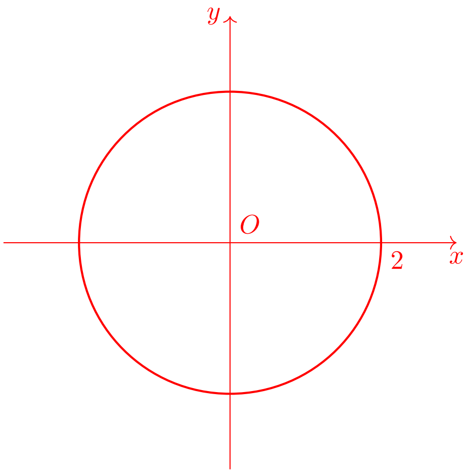
   を解くことで $x = 6$ を得る．

4. 次の集合で表される図形を図示せよ．ただし，d はユークリッド距離関数である．

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 \mid d((x,y),(0,0)) = 2\}$

(解答例)

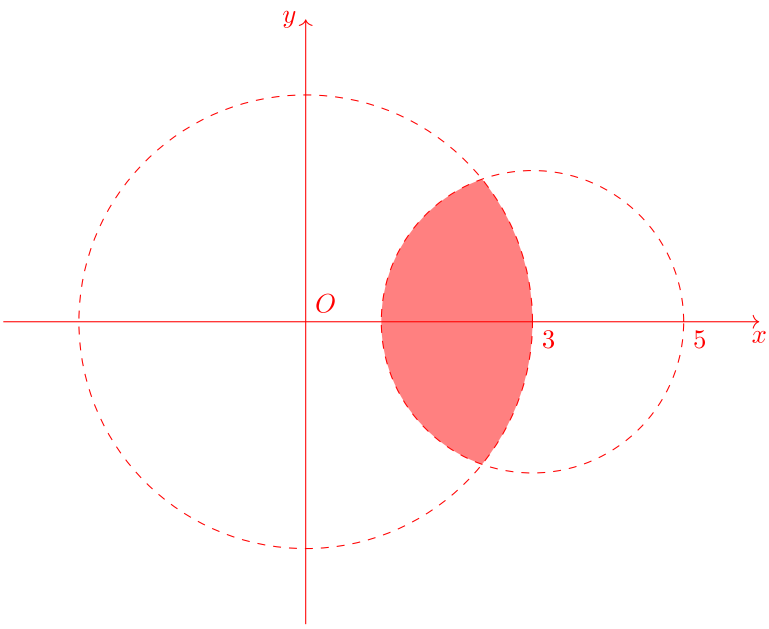
図示する図形は，原点からの距離が 2 となる点 $(x,y) \in \mathbb{E}^2$ 全体，すなわち原点中心で半径 2 の円である．



(b) $\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 \mid d((x,y),(0,0)) < 3\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 \mid d((x,y),(3,0)) < 2\}$

(解答例)

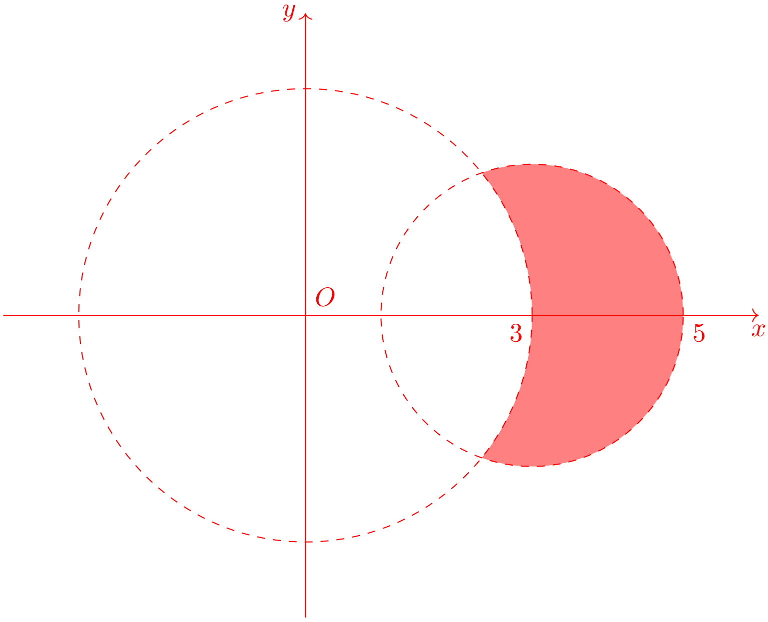
図示する図形は，原点中心で半径 3 の円 C_1 の内部 (境界は含まない) と，点 $(3,0)$ 中心で半径 2 の円 C_2 の内部 (境界は含まない) の共通部分である．



(c) $\left\{(x,y)\in\mathbb{E}^2 \,\middle|\, d((x,y),(0,0))>3\right\}\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{E}^2 \,\middle|\, d((x,y),(3,0))<2\right\}$

(解答例)

図示する図形は, 原点中心で半径 3 の円 C_1 の外部 (境界は含まない) と, 点 $(3,0)$ 中心で半径 2 の円 C_2 の内部 (境界は含まない) の共通部分である.



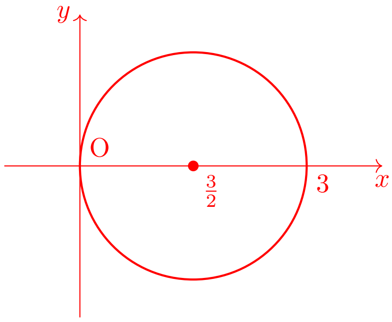
(d) $P_0=(1,0)$ に対して $\left\{P=(x,y)\in\mathbb{E}^2 \,\middle|\, d(P_0,P)=x+1\right\}$

(解答例)

点 $P=(x,y)\in\mathbb{E}^2$ に対して $d(P_0,P)=(x-1)^2+y^2$ である. したがって図示する図形は $(x-1)^2+y^2=x+1$ を満たす点 $(x,y)\in\mathbb{E}^2$ の軌跡である. ここで

$$(x-1)^2+y^2=x+1 \iff \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$$

であるから, この図形は中心 $(3/2,0)$ で半径 $3/2$ の円である.



5. (確認テストには出しません．余力のある人は解いてみてください.)
次の不等式を証明せよ．ただし, 出来る限り多くの異なる証明を記せ．

$$\text{任意の } a, b, x, y \in \mathbb{R} \text{ に対して } (a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$$

(解答例)
$\boldsymbol{a} = (a, b), \boldsymbol{x} = (x, y)$ とおく．このときベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}$ のなす角を θ とおくと

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{x}|^2 \geq |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{x}|^2\cos^2\theta = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})^2 = (ax+by)^2$$

となり示された．

6. (確認テストには出しません．余力のある人は解いてみてください.)
Minecraft とは, 3D ブロックで構成された仮想空間の中で自由に探索や創作を行えるゲームである．本ゲーム内のアイテム「松明」は, 洞窟等の暗い場所に設置することによりその周囲を照らすことができる．以下の図は, 松明の明るさレベルを 5 としたときに松明が設置されている地面 (同一平面) の明るさレベルを簡易的に記したものである (実際のゲームでは 14 に設定されている).

0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	2	1	0	0	0
0	0	1	2	3	2	1	0	0
0	1	2	3	4	3	2	1	0
1	2	3	4	松明 **5**	4	3	2	1
0	1	2	3	4	3	2	1	0
0	0	1	2	3	2	1	0	0
0	0	0	1	2	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0

つまり松明を中心として, そこから一つ隣り合うごとに明るさレベルが一つ減るような設定となっている．このような, “隣り合ったマス間の距離を 1” と考える距離にはマンハッタン距離という名前が付いている．

定義． 点 $P = (x_1, x_2)$ と点 $Q = (y_1, y_2)$ に対して, その間の**マンハッタン距離** $d_M(P, Q)$ を以下のように定める:

$$d_M(P,Q) \coloneqq \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i| \quad (= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|)$$

例えば点 $P = (3, -1)$ と原点 O の間のマンハッタン距離は

$$d_M(P, O) = |3-0| + |-1-0| = 3+1 = 4$$

と計算できる． したがって $d_M(P, O) < 5$ であるから点 P には松明の光が届く． また, その明るさレベルは $5 - d_M(P, O) = 1$ となる．このとき次の問いに答えよ．

(a) 点 $P = (-2, 3)$ と原点の間のマンハッタン距離を計算せよ．また, 点 P には松明の光が届くか答えよ．

(解答例)
マンハッタン距離の定義から

$$d_M(P, O) = |-2-0| + |3-0| = 2+3 = 5$$

である．したがって $d_M(P, O) \geq 5$ であるから点 P には松明の光が届かない．(明るさレベル 0.)

(b) 松明の明るさレベルを 14, 松明が設置されている地点を $L = (4, -1)$ とする．このとき点 $P = (-3, -6)$ の明るさレベルはいくつか.

(解答例)

点 L と点 P の間のマンハッタン距離を計算すると

$$d_M(L, P) = |4 - (-3)| + |-1 - (-6)| = 7 + 5 = 12$$

となる．このとき点 P の明るさレベルは

$$14 - d_M(L, P) = 14 - 12 = 2$$

と計算できる.